

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

16. Band, Heft 1

8. Juni 1937

S. 1—48

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

● **Hermes, Hans, und Heinrich Scholz:** Ein neuer Vollständigkeitsbeweis für das reduzierte Fregesche Axiomensystem des Aussagenkalküls. (Forsch. z. Logik u. z. Grundlegung d. exakten Wiss. N. F. Hrsg. v. Heinrich Scholz. Unter Mitwirkung v. W. Ackermann, F. Bachmann, G. Gentzen u. A. Kratzer. H. 1.) Deutsche Math. 1, 733—772 (1936) u. Leipzig: S. Hirzel 1937. 40 S. RM. 1.80.

Zum Beweise der Vollständigkeit deduktiver Systeme der vollen Aussagenlogik sind verschiedene Methoden bekannt: Überführung einer beliebigen Formel in eine konjunktive oder disjunktive Normalform (Schröder, Post, Bernays); direkter struktureller Beweis, daß eine Formel nicht „frei“ (d. h. weder ableitbar noch widerspruchsvoll) sein kann (Łukasiewicz, dies. Zbl. 4, 385f.); eine Wertungsmethode mit Heranziehung des Deduktionstheorems (Kalmár, dies. Zbl. 14, 194). Dazu tritt nun die Methode von Hermes, welche sich auf einen Kalkül bezieht, der die Verknüpfungen C (Implikation), N (Negation) umfaßt und von dem Frege-Łukasiewiczschen Axiomensystem $CpCqp, CCpCqrCCpqCpr, CCNpNqCqp$ ausgeht. Die Methode geht zunächst (wie auch die von Łukasiewicz) von gewissen an C, N -Formeln ausführbaren Umformungen aus; im Gegensatz zu jener wird jedoch eine beliebige gegebene Formel schrittweise — unter rekursiver Benutzung einer „Einfachheits“-funktion — in eine deduktionsgleiche, dem C, N -Kalkül angemessene „Normalform“ der Gestalt $C\mathfrak{P}_1 \dots C\mathfrak{P}_n \mathfrak{Q}$, wo jedes \mathfrak{P}_i und \mathfrak{Q} eine Variable oder das Negat einer solchen bezeichnet, übergeführt; eine solche Normalform ist ableitbar, wenn ein \mathfrak{P}_i mit einem $N\mathfrak{P}_j$ oder mit \mathfrak{Q} übereinstimmt, sonst ist sie widerspruchsvoll. — In einem einleitenden Paragraphen von H. Scholz (von dem die Anregung, die Vollständigkeit des angegebenen Kalküls auf möglichst direktem Wege zu beweisen, stammt) werden Begriffsbildungen und Methode des Beweises abgegrenzt, die gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome bewiesen und das Axiomensystem historisch beleuchtet, wobei auch die (auf Łukasiewicz zurückgehende) Äquivalenz des benutzten Axiomensystems mit dem ursprünglichen (6 Axiome umfassenden) Axiomensystem Freges ausführlich dargestellt wird.

Arnold Schmidt (Marburg, Lahn).

Beth, E. W.: Une démonstration de la non-contradiction de la logique des types au point de vue fini. Nieuw Arch. Wiskde 19, 59—62 (1936).

In Math. Z. 41 (dies. Zbl. 15, 193) gab Gentzen einen finiten Beweis für die Widerspruchsfreiheit der Stufenlogik (ohne Unendlichkeitsaxiom). Die vorliegende Arbeit stellt (im wesentlichen) denselben Ansatz zum Beweise dieser Widerspruchsfreiheit dar, den der Verf., wie er betont, unabhängig von Gentzen fand. Beth gibt an, sein Beweis gehe insofern über den Gentzenschen hinaus, als er auch die verzweigte Typentheorie einbeziehe, doch sind faktisch bei ihm nirgends die Daten der Verzweigkeit behandelt. Überhaupt werden die Axiome und Regeln der als widerspruchsfrei zu erweisenden Theorie nicht formuliert; es handelt sich lediglich um eine Schilderung des (eine Erweiterung einer bekannten Methode darstellenden) Grundgedankens für den Ansatz; das weitere, insbesondere die — bei Gentzen im Vordergrund stehende — Durchführung des Ansatzes in bezug auf diejenigen Axiome, bei denen sie nicht trivial ist, fehlt.

Arnold Schmidt (Marburg, Lahn).

Mihăilescu, Eng. Gh.: Recherches sur un sous-système du calcul des propositions. Ann. Sci. Univ. Jassy 23, 106—124 (1937).

In § 3 seiner „Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik“ (Fundam. Math. 14) stellte Lesniewski für die allein aus der Äquivalenzverknüpfung

aufgebauten Formeln ein von 2 Axiomen ausgehendes deduktives System auf und bewies seine Vollständigkeit; er zeigte, daß der Bereich der ableitbaren Formeln mit dem Bereich der identisch wahren Äquivalenzformeln und ebenso auch mit dem Bereich derjenigen Äquivalenzformeln, in denen jede Variable eine gerade Anzahl von Malen auftritt, zusammenfällt. — Mihailescu geht von dem etwas einfacheren Axiomensystem $EEpqEqp, EEEpqrEpEqr$ ($E \cdots$ Äquivalenz) aus. Für das aus diesen Axiomen fließende deduktive System werden die obengenannten Vollständigkeitssätze bewiesen, indem (im Gegensatz zur Lesniewskischen Beweismethode) eine beliebige E -Formel in eine deduktionsgleiche „Normalform“ folgender Gestalt übergeführt wird:

$$\underbrace{E \dots E}_{n} p_1 q_1 E p_2 q_2 \dots E p_{n-1} q_{n-1} E p_n \beta,$$

wo β entweder für q_n oder für $E q_n q_{n+1}$ steht (die p_i, q_i bezeichnen Variablen). — Eine Untersuchung der Hinzunahme der Negation wird angekündigt.

Arnold Schmidt (Marburg, Lahn).

Church, Alonzo, and S. C. Kleene: Formal definitions in the theory of ordinal numbers. Fundam. Math. 28, 11—21 (1937).

This paper has reference to the system of formal logic proposed by Church and developed by him and his students (see mimeographed notes on Church's lectures issued by Princeton University, 1934; or Church, this Zbl. 14, 98, and Kleene, this Zbl. 14, 385). This system has been proved consistent (cf. this Zbl. 12, 241), although the earlier forms of Church's system were not (see Kleene and Rosser, this Zbl. 12, 146). The object of the authors is to develop a formal theory of transfinite ordinal numbers in the system, just as previous work by Kleene (l. c., see also this Zbl. 11, 2 and 241) showed that a formal theory of positive integers could be so set up. To this end the authors define the formulas l_0, S_0 , and L_0 which represent the ordinal 1, the successor function, and the limit function respectively; they then put the formulas generated by these in the usual fashion into correspondence with the ordinal numbers. They show that to every formula in the set there corresponds a unique ordinal number, and conversely that to every effectively given ordinal of the second number class there corresponds at least one formula of the set; but it is not true that two formulas corresponding to the same ordinal are equivalent (i.e. interconvertible) in the system, — indeed the authors state that the problem of determining whether two formulas in the set represent the same ordinal is unsolvable (in the sense of Church, this Zbl. 14, 98). As to functions of ordinals, the authors show that every function defined by transfinite induction has a formal analogue in the system. In particular this is true of functions e , enm , and v , where, for any ordinal: $-e(\alpha)$ is ε_α (i.e. the α -th epsilon number); $enm(\alpha, 1), enm(\alpha, 2), \dots$ is an enumeration of the ordinals $< \alpha$; while the ordinals $v(\alpha) = \omega_\alpha$ have properties analogous, from the constructive viewpoint, to the initial numbers of the various number classes, although from the non-constructive viewpoint they all belong to the second number class. For the authors' own abstract see Bull. Amer. Math. Soc. 41, 627 (1935). Curry.

McKinsey, J. C. C.: On the generation of the functions C_{pq} and N_p of Łukasiewicz and Tarski by means of a single binary operation. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 849—851 (1936).

The paper concerns the n -valued matrix logics of the Polish authors named. The result differs from a similar result of D. L. Webb (this Zbl. 12, 1) in that the single binary operation is itself defined in terms of C and N ; moreover it does not suffice for the definition of every possible function in the logic. H. B. Curry.

Février, Paulette: Sur une forme générale de la définition d'une logique. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 958—959 (1937).

Bouligand, Georges: La causalité mathématique. Thalès. Rec. Ann. Trav. Inst. Hist. Sci. et Techn., Univ. Paris 2, 23—29 (1935).

● Freytag, Bruno Baron von, gen. Löringhoff: Die ontologischen Grundlagen der Mathematik. Eine Untersuchung über die „Mathematische Existenz“. Halle a. d. S.: Max Niemeyer 1937. 49 S. RM. 1.50.

Rein philosophische Untersuchung über die Art der Existenz von mathematischen Gegenständen auf Grund der Ontologie von Günther Jacoby. A. Heyting.

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra, Polynome, Invariantentheorie:

Petterson, Erik L.: Über Reduzibilitätseigenschaften gewisser Polynome, die einen Parameter enthalten. Math. Ann. 114, 74—78 (1937).

Als eine Verallgemeinerung des schon in dies. Zbl. 14, 289 referierten Resultates beweist der Verf. folgenden Satz: Ein Polynom $f(x, E) = \sum_{v=1}^n g_v(x) x E^v + g_0(x)$, wobei $g_v(x)$ teilerfremde ganzzahlige Polynome eines imaginär-quadratischen Körpers K sind und $g_0(0) \neq 0$, $g_n(0) \neq 0$ gilt, kann nur für endlich viele ganzzahlige Werte von E innerhalb K reduzibel sein. — Die Voraussetzung über K ist notwendig, um die Endlichkeit der Faktorenzerlegungen zu sichern. — Die Irreduzibilität von $f(x, E)$ wird nicht vorausgesetzt, leuchtet aber unmittelbar ein, wenn man die Zerlegung von E nach steigenden gebrochenen Potenzen von x in Betracht zieht (ein Analogon des Eisensteinschen Irreduzibilitätssatzes). — Dieser Satz wird vom Verf. noch etwas verallgemeinert.

N. Tschebotarow (Kasan).

Petterson, Erik L.: Einige aus den Größenbeziehungen der Wurzeln abgeleitete Irreduzibilitätskriterien. Math. Ann. 114, 79—83 (1937).

Mit Hilfe des Perronschen Prinzips [J. reine angew. Math. 132, 288 (1907)] und des Satzes von Rouché erhält der Verf. folgenden Satz: Ist $f(x) = g(x)x + M(x)$ ein normiertes Polynom, wobei $g(x)$, $M(x)$ ganzzahlige Polynome sind, und gibt es eine Zahl $\varrho > 0$ derart, daß 1. $g(x)$ keine Wurzeln innerhalb von $|x| = \varrho$ hat, 2. daß $|g(x)| > \frac{|M(x)|}{\varrho}$ auf $|x| = \varrho$ gilt, 3. daß $1 \leq |M(0)| \leq \varrho$ gilt, so ist $f(x)$ irreduzibel. — Dieser Satz findet eine unmittelbare Anwendung in den ganzzahligen Polynomen $f(x) = (x^m - a)x + (x^m - b)$, wobei $|a + b| > 2|b|^m$ gilt. — Weitere ähnliche Sätze erlauben, für Polynome vom Typ $f(x) = x \prod_{v=1}^n (x - b_v) + a$ ein Kriterium aufzustellen.

N. Tschebotarow (Kasan).

Tihanyi, Nikolaus: Die Multiplikation der Weberschen Resolventen. Mat. természett. Értes 55, 173—183 u. deutsch. Zusammenfassung 184—185 (1937) [Ungarisch].

$$\text{Esseir} = e^{\frac{2\pi i}{2^n}}, \omega = e^{\frac{2\pi i}{2^{n-2}}}, ((-1)^{h_1}, \omega^h, r) = \sum_{\mu=1}^{2^n-1} (-1)^{h_1 \alpha_1} \omega^{h \alpha} r^\mu, \mu \equiv (-1)^{\alpha_1} 5^\alpha \pmod{2^n}.$$

Für diese Webersche Resolvente beweist Verf. die folgende Produktformel

$$((-1)^{h_1}, \omega^h, r) ((-1)^{k_1}, \omega^k, r) = 2^a \sum_{l=1}^{2^{n-a}-1} (-1)^{h_1 \alpha_1} \omega^{h \alpha} ((-1)^{h_1+k_1}, \omega_a^m, r_a^l),$$

wenn nur $h + k = m \cdot 2^a$, $a < n - 2$, $(m, 2) = 1$, $\mu = l \cdot 2^a - 1 \equiv (-1)^{\alpha_1} 5^\alpha \pmod{2^n}$, $(l, 2) = 1$, $\omega_a = \omega^{2^a}$, $r_a = r^{2^a}$. Für die Methode des Beweises vgl. M. Tihanyi, dies. Zbl. 9, 296—297.

Lubelski (Warschau).

Ostrowski, Alexandre: Sur la détermination des bornes inférieures pour une classe des déterminants. Bull. Sci. math., II. s. 61, 19—32 (1937).

I. Minkowski und Hadamard hatten bewiesen: Wenn alle Diagonalelemente $|a_{vv}| = 1$ und alle $h_v = 2 - \sum_{\mu=1}^n |a_{\mu v}| > 0$, so ist $D \neq 0$. Verf. gibt drei Verschärfungen dieses Satzes: 1. Mittels einer Modifikation der Hadamardschen Überlegung findet er $|D| \geq h_1 h_2 \dots h_n$. 2. Mittels des v. Kochschen Gedankenganges und Determinanten-

sätze von Schur und Frobenius findet er $|D| \geq e^{\sigma^2/s}(1-s)^{\sigma^2/s^2} \geq e^{bS/s}(1-s)^{bS/s^2}$ wo $\sigma^2 = \sum_{\nu, \mu} |a_{\nu\mu}|^2 - n$, $b = \max |a_{\mu\nu}|$ für $\mu \neq \nu$, $s = \max(1 - h_\nu)$. Koch hatte nun die schwächere Ungleichung $|D| \geq e^S(1-s)^{S/s}$, wo $S = \sum_\nu (1 - h_\nu)$. 3. Im Falle $\sigma <$

findet Verf.: $|D| \geq e^\sigma(1-\sigma)$. — Von diesen drei neuen Grenzen des Verf. ist kein prinzipiell schärfer als die andere. — II. Blumenthal hatte s. Z. eine obere Grenze für die Ungenauigkeit der Wurzeln von linearen Gleichungen, deren Koeffizienten nicht genau bekannt sind, gefunden. Verf. ersetzt diese Grenze durch eine i. allg. genauere, welche den Einfluß der Koeffizienten zu trennen gestattet von dem der konstanten Glieder. — III. Welche Veränderungen darf man an den Koeffizienten einer Determinante $|A| \neq 0$ anbringen, damit die neue Determinante $|A^*| = |A + D|$ wo $|D| = |\delta_{\mu\nu}|$, ebenfalls $\neq 0$ bleibt? Sei $\max |\delta_{\mu\nu}| = \delta$, $\sum_{\mu, \nu} |\delta_{\mu\nu}|^2 = \vartheta$, so findet Verf., damit $|A^*| \neq 0$, als hinreichende Bedingungen: 1. $\delta < 1/\sum_{\mu, \nu} |\alpha_{\mu\nu}|$ bzw. 2. $\vartheta < 1/\sum_{\mu, \nu} |\alpha_{\mu\nu}|^2$, je nachdem δ bzw. ϑ als Schwankungsgrenze genommen wird ($\alpha_{\mu\nu}$ sind die Glieder von A^{-1}). — IV. Schließlich gibt Verf. einen besonders einfachen Beweis für die Hadamardsche Ungleichung: $|D|^2 \leq \prod_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n |a_{\mu\nu}|^2$. Bodewig (Basel).

Oldenburger, Rufus: Equivalence of multilinear forms singular on one index. Duke math. J. 2, 671—680 (1936).

The author continues his study (this Zbl. 14, 290) of n -th order p -way matrices of the type $A = \left(\sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha i_1} b_{\alpha i_2} \dots d_{\alpha i_p} \right)$ where $(a_{\alpha i_1})$ is singular of rank r , the other component matrices being non-singular. Necessary and sufficient conditions in terms of invariant factors are obtained for the equivalence of two such matrices having the same n, p, r . Some of the associated canonical forms are derived. For $p \geq 3$, $n \geq$ the number of such forms is infinite. MacDuffee (Madison).

Akeley, Edward S.: Tensors associated with a pair of quadratic differential forms. J. Franklin Inst. 223, 199—214 (1937).

Ein Paar von quadratischen Differentialformen $G_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta}$ bestimmt im allgemeinen in jedem Punkt des Raumes ein System von n orthogonalen Einheitsvektoren (eindeutig bis auf Permutationen und Multiplikation mit ± 1) und n zugehörige Invarianten λ_m , die Elementarteiler von $G_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}$. Jeder Tensor, der rational und invariant von diesen n Vektoren und n Zahlen und ihren Ableitungen abhängt, ist auf Grund eines Satzes der Galoisschen Theorie auch rational durch die Tensoren $g_{\alpha\beta}, G_{\alpha\beta}$ und ihren Ableitungen ausdrückbar. Es werden gewisse Fundamentalsysteme von Tensoren angegeben, durch welche alle rationalen Kovarianten von gegebener Differentiationsordnung rational ausgedrückt werden können. Es gibt keine rationalen Kovarianten von ungerader Ordnung. van der Waerden (Leipzig).

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

Mori, Shinziro, und Takeo Dodo: Bedingungen für ganze Abgeschlossenheit in Integritätsbereichen. J. Sci. Hiroshima Univ. A 7, 15—27 (1937).

Es werden Integritätsbereiche J betrachtet, in denen der Teilerkettensatz gilt. Zu jeder Primidealpotez p^r gehört eine einzige zu p gehörige isolierte Primärkomponente, die nach Krull (vgl. dies. Zbl. 11, 197) als symbolische Potenz $p^{(r)}$ bezeichnet wird. Es werden zwei Kriterien abgeleitet: 1. J ist dann und nur dann ganz abgeschlossen, wenn zwischen den symbolischen Potenzen $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ jedes zu einem Hauptideal gehörigen Primideals kein weiteres Primärideal liegt. 2. J ist dann und nur dann ganz abgeschlossen, wenn die symbolische Potenz $p^{(2)}$ jedes zu einem Hauptideal gehörigen Primideals irreduzibel ist.

G. Köthe (Münster i. W.).

Wolf, Margarete C.: Symmetric functions of non-commutative elements. Duke math. J. 2, 626—637 (1936).

The author proves an analogue of the fundamental theorem on symmetric functions of commutative indeterminates for elements x_1, \dots, x_n completely independent and completely non-commutative of order m i.e. no polynomial of degree $\leq m$ in the x 's vanishes unless all of its coefficients are 0. For each m and n the x 's may be realized as elements of an associative algebra with a finite basis or by matrices. The number of polynomials in a fundamental set necessary to express uniquely all symmetric functions of degree m is finite and independent of the particular fundamental set. As $m \rightarrow \infty$ this number $\rightarrow \infty$ also.

Jacobson (Chicago).

Vandiver, H. S.: Note on an associative distributive algebra in which the commutative law of addition does not hold. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 857—859 (1936).

Es wird eine Algebra konstruiert, in der Addition und Multiplikation assoziativ sind und beide distributiven Gesetze gelten, in der aber die Addition nicht kommutativ ist.

R. Brauer (Toronto).

Glivenko, V.: Algèbre mendélienne. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 4, 385—386 (1936).

The author shows that Mendel's laws of heredity define a hypercomplex algebra. The latter resembles Grassmann's extensional calculus, except that commutativity replaces skew-symmetry. The laws are useful in making theoretical predictions as to the result of a population mixture.

Garrett Birkhoff (Cambridge, Mass.).

Zahl- und Funktionenkörper:

Mahler, Kurt: Über Pseudobewertungen. III. (Die Pseudobewertungen der Hauptordnung eines endlichen algebraischen Zahlkörpers.) Acta math. 67, 283—328 (1936).

Die Arbeit enthält den Beweis der vom Verf. in Teil I aufgestellten Vermutung, daß jede Pseudobewertung $W(\alpha)$ der Hauptordnung J eines endlichen algebraischen Zahlkörpers der direkten Summe einiger Absolutbetragbewertungen, einiger p -adischer Bewertungen und einer Restklassenbewertung äquivalent sei (dies. Zbl. 13, 51). Der Beweis ist dem für die entsprechende Vollständigkeitseigenschaft der vollen Zahlkörper verwandt (dies. Zbl. 14, 340), jedoch hält der Verf. das eine Ergebnis nicht für ohne weiteres aus dem anderen herleitbar. — Einer endlichen Primidealpotez p^f wird die Restklassenpseudobewertung

$$W_{p^f}(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha \equiv 0 \pmod{p^f} \\ 1, & \alpha \not\equiv 0 \pmod{p^f} \end{cases}$$

einer (symbolischen) unendlichen Potenz p^∞ die p -adische Bewertung $\Omega_p(\alpha)$ und einer unendlichen Primstelle $p^{(h)}$ die sie definierende Betragsbewertung $\Omega^{(h)}(\alpha)$ zugeordnet. Ein formales Potenzprodukt

$$\tilde{\alpha} = \prod_{p_i \text{ endl.}} p_i^{f_i} \cdot p_{\infty, i_1} \dots p_{\infty, i_s}, \quad f_i > 0$$

heißt ein Pseudoideal. Es wird $\tilde{\alpha} = 0$ gesetzt, wenn alle $p_{\infty, i}$ in α vorkommen. Dem Pseudoideal $\tilde{\alpha}$ wird die Pseudobewertung

$$W(\alpha|\tilde{\alpha}) = \sum_{f_i \text{ endl.}} W_{p_i^{f_i}}(\alpha) + \sum_{f_i = \infty} \Omega_{p_i}(\alpha) + \sum_{v=1}^s \Omega^{(i_v)}(\alpha)$$

zugeordnet. Verschiedene Pseudoideale haben äquivalente Pseudobewertungen, gleiche äquivalente. Die Summendarstellung ist direkt, wenn $\tilde{\alpha} \neq 0$ ist. Eine Bewertung $\Omega^{(h)}(\alpha)$ erscheint sich als in der beliebig gegebenen Pseudobewertung $W(\alpha)$ enthalten, wenn es kein $\alpha \neq 0$ aus J mit $\Omega^{(h)}(\alpha) \geq 1$, $W(\alpha) < 1$ gibt. Sind $\Omega^{(i_1)}(\alpha), \dots, \Omega^{(i_s)}(\alpha)$ die $\Omega^{(h)}(\alpha)$ mit dieser Eigenschaft und wird $\max(\Omega^{(i_1)}(\alpha), \dots, \Omega^{(i_s)}(\alpha)) = \Omega(\alpha)$ gesetzt, so gilt

$$W(\alpha) \leq c \max(\Omega(\alpha), 1)$$

mit festem positivem c . — Eine Zahl $\gamma \neq 0$ aus J heißt W -Zahl, wenn es $\delta \neq 0$ aus J gibt, so daß

$$\lim_{j \rightarrow \infty} W(\gamma^j \delta) = 0$$

ist. Die Zahlen γ , für die eine Einheit η so gefunden werden kann, daß $\gamma\eta$ W -Zahl ist, bilden zusammen mit 0 ein quadratfreies Ideal $c \neq 0$ von J , den Hauptcharakter von W . Die Zahl $\delta \neq 0$ aus J heißt w -Zahl, wenn für jede W -Zahl $\gamma \lim_{j \rightarrow \infty} W(\gamma^j \delta) = 0$

ist. Die w -Zahlen bilden zusammen mit 0 ein Ideal $\mathfrak{d} \neq 0$ von J , den Nebencharakter von W . Setzt man jetzt $\tilde{a} = p_{\infty, i_1} \dots p_{\infty, i_r} \cdot \mathfrak{d} \cdot c^{\infty}$,

so ist $W(\alpha)$ zu $W(\alpha|\tilde{a})$ äquivalent, was nach der Definition von $W(\alpha|\tilde{a})$ die Behauptung darstellt. Deuring (Jena).

Gut, Max: Über Erweiterungen von unendlichen algebraischen Zahlkörpern. Comment. math. helv. 9, 136—155 (1937).

Nach Stiemke kann ein unendlicher algebraischer Zahlkörper k durch eine abzählbare Folge von endlichen algebraischen Körpern

$$k_1 \subset k_2 \subset \dots, \quad \lim k_i = k$$

definiert werden. Die Primideale \mathfrak{p} von k werden entsprechend durch

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots, \quad \lim \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p} \quad (*)$$

definiert. Die Grad- und Ordnungszahlen f_i und e_i der Primideale $(*)$ bilden nicht-abnehmende Reihen. Der Verf. studiert nun die endlichen Erweiterungen K eines solchen unendlichen Körpers k , worin $\lim e_i = e$ und $\lim f_i = f$ existieren und endlich sind für alle Primideale \mathfrak{p} in k . Diese Theorie wird erheblich einfacher als die allgemeine Theorie von Deuring, Herbrand u. a., indem die meisten Resultate über endliche Erweiterungen von endlichen Körpern fast wörtlich erhalten bleiben. Der Verf. zeigt speziell, daß die Sätze einer Arbeit des Ref. (Math. Ann. 96, 97) über Primidealzerlegungen, Differenten, Diskriminante, Lückensatz für Supplementzahlen und gemeinsame außerwesentliche Teiler auch für solche Körper k richtig sind. Zuletzt wird die Existenz von Körpern k von diesem Typus nachgewiesen, und zwar wird bewiesen, daß der Körper, der aus allen quadratischen Irrationalitäten besteht, und auch der Vereinigungskörper von allen zyklischen Körpern von einem festen Primzahlgrad die angegebene Eigenschaft haben. Ore (New Haven).

Scholz, Arnold: Konstruktion algebraischer Zahlkörper mit beliebiger Gruppe von Primzahlpotenzordnung. I. Math. Z. 42, 161—188 (1937).

Die berühmte Frage nach der Existenz von algebraischen Zahlkörpern zu vorgegebenen Gruppen wird für beliebige Gruppen ungerader Primzahlpotenzordnung (l -Gruppen) gelöst. Nach früheren Ergebnissen von A. Scholz (S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1929, Nr. 14) folgt daraus gleichzeitig die Existenz von Körpern zu beliebigen zweistufigen Gruppen ungerader Ordnung. Körper zu zweistufigen l -Gruppen mit 2 Erzeugenden hatte Scholz bereits früher konstruiert (dies. Zbl. 10, 337). G_m sei eine l -Gruppe der Ordnung l^m . Die Konstruktion eines algebraischen Zahlkörpers mit G_m als Galoisgruppe in bezug auf den rationalen Zahlkörper wird durch Aufeinandertürmung von relativ-zyklischen Körpern vom Relativgrad l durchgeführt. Dazu wird G_m in eine Hauptreihe J, G_1, \dots, G_m entwickelt, wobei $G_{\mu-1}$ maximale echte Faktorgruppe von G_{μ} sei. Da G_m eine l -Gruppe ist, gilt $G_{\mu-1} = G_{\mu}/C_{\mu}$, wobei C_{μ} im Zentrum von G_{μ} liegt und die Ordnung l hat. Der Körper mit G_{μ} als Gruppe werde mit K_{μ} bezeichnet. K_1 ist als zyklischer Körper l -ten Grades natürlich konstruierbar. Die Gruppe G_{μ} ist eine zentrale Erweiterung (Aufspaltung) von $G_{\mu-1}$. Das Problem, von $K_{\mu-1}$ zu K_{μ} zu gelangen, ist ein sogenanntes Einbettungsproblem. Aus dem Richterschen Einbettungssatz (dies. Zbl. 13, 147) folgt, daß die der Aufspaltung $G_{\mu-1} \rightarrow G_{\mu}$ entsprechende Einbettung unter der Voraussetzung, daß der Basiskörper K_0 die l -ten Einheitswurzeln enthält, durchgeführt werden kann, wenn für jede Primstelle ein entsprechendes Einbettungsproblem lösbar ist. Daraus wird der folgende „spezielle Einbettungssatz“ gefolgert: Alle zentralen Einbettungen eines Galoisschen Körpers K/K_0 , in dem alle Diskriminantenteiler \mathfrak{p} voll zerfallen (d. h. in Primideale vom 1. Relativgrad), sind möglich, wenn die Trägheitssubstitutionen in diesen Einbettungen höchstens die Ord-

nung l^h erreichen, wenn $N(p) \equiv 1(l^h)$. Die Voraussetzung, daß K_0 die l -ten Einheitswurzeln enthält, wird später entbehrlich gemacht. Es wird ferner bewiesen (dies ist der wichtigste Punkt der Konstruktion), daß die Einbettung von $K_{\mu-1}$ in einen K_μ stets so vollzogen werden kann, daß sie fortsetzbar ist, nämlich daß die für die Gültigkeit des speziellen Einbettungssatzes hinreichenden Bedingungen wieder erfüllt sind, wenn sie in $K_{\mu-1}$ erfüllt waren. Dies geschieht mit Hilfe des „Durchkreuzungssatzes“, welcher zeigt, wie aus einer Einbettung alle übrigen gewonnen werden können. Der Durchkreuzungssatz ist ein rein gruppentheoretischer Sachverhalt. Ist K'_μ eine Einbettung von $K_{\mu-1}$, so gelangt man zu einer anderen K''_μ , indem man K'_μ mit einem dazu fremden Körper K^0 durchkreuzt, d. h. aus dem Produkt $K'_\mu \times K^0$ eine andere Einbettung K''_μ von $K_{\mu-1}$ in einen Körper mit G_μ als Gruppe herausgreift. Es wird gezeigt, daß man durch abelsche Durchkreuzungen alle Einbettungen von $K_{\mu-1}$ erhält. Dazu ist wesentlich, daß $K_{\mu-1}$ zum Zentrum von G_μ gehört. Betrachtet man nicht notwendig direkte Produkte $K'_\mu K^0$, so gelangt man so zu Körpern mit „verwandten“, aber nicht notwendig isomorphen Erweiterungen als Gruppen. — Über die Führer der relativ-zyklischen Einbettungen $K_\mu/K_{\mu-1}$ gilt: Die Konstruktion kann immer so geleistet werden, daß l nicht verzweigt ist; unter gewissen Umständen kann durch Kreiskörperdurchkreuzung erreicht werden, daß in $K_\mu/K_{\mu-1}$ nur in $K_{\mu-1}$ verzweigte Primideale wieder verzweigt werden. — Der Fall $l = 2$ wird nur diskutiert; daß die Konstruktion in diesem Fall auf größere Schwierigkeiten führt, liegt am quadratischen Reziprozitätsgesetz. — Schließlich wird die Struktur der l -Gruppen diskutiert. Es wird gezeigt, wie man von einer endlichen abelschen Gruppe ausgehend alle endlichen l -Gruppen mit n Erzeugenden einfangen kann. Dies geschieht durch Betrachtung der Magnusschen Dimensionsreihen (dies. Zbl. 11, 152). Auch wird die Magnussche Vermutung, daß diese Dimensionsreihen mit den Gliedern der „lower central series“ übereinstimmen, für die Faktorgruppen der freien Gruppen mod der 2. Kommutatorgruppe bewiesen. Taussky (Cambridge).

Schmid, Hermann Ludwig: Relationen zwischen verallgemeinerten Gaußschen Summen. J. reine angew. Math. 176, 189—191 (1937).

k sei ein Galoisfeld mit $q = p^f$ Elementen. Ist $\chi(x)$ ein Charakter der Multiplikativgruppe von k , so heißt

$$\tau(\chi) = - \sum_{x \neq 0} \chi(x) e^{\frac{2\pi i}{p} \mathfrak{S}(x)} \quad (\mathfrak{S} \text{ absolute Spur})$$

eine verallgemeinerte Gaußsche Summe. Davenport und Hasse haben [dies. Zbl. 10, 338, (1)] die folgende Relation bewiesen:

$$\tau^r(\chi_r) = \tau(\chi)^r. \quad (1)$$

Dabei ist χ_r der durch $\chi_r(y) = \chi(N_{k^{(r)}/k} y)$ definierte Charakter der Erweiterung r -ten Grades $k^{(r)}$ von k und $\tau^r(\chi_r)$ die mit χ_r gebildete Gaußsche Summe zum Körper $k^{(r)}$. Verf. gibt einen elementaren Beweis dieser Formel durch Induktion nach r . Wird (1) vorausgesetzt, so gilt

$$\tau(\chi)^{r+1} - \tau^{r+1}(\chi_{r+1}) = \sum_{u \text{ in } k} \chi(u) \sum_{v \bmod p} e^{\frac{2\pi i v}{p}} [M(u, v) + N(u, v)],$$

wo $M(u, v)$ die Zahl der Lösungen $x \neq 0$ aus k , $y \neq 0$ aus $k^{(r)}$ von

$$\mathfrak{S}(x + S_{k^{(r)}/k} y) = v, \quad x N_{k^{(r)}/k} y = u$$

und $N(u, v)$ die Zahl der Lösungen $z \neq 0$ aus $k^{(r+1)}$ von

$$\mathfrak{S}(S_{k^{(r+1)}/k} z) = v, \quad N_{k^{(r+1)}/k} z = u$$

bedeutet. Mit einer rationalen Funktion

$$f_u(t) = \sum_{i=0}^{f-1} \left(t + t^q + \dots + t^{q^{r-1}} + \frac{u}{t^{1+q+\dots+q^{r-1}}} \right)^{p^i}$$

kann man $M(u, v)$ als Lösungszahl von $f_u(y) = v$, $y \neq 0$ aus $k^{(r)}$, $M(u, v)$ als Lösungszahl von $f_u(z) = v$, $N_{k^{(r+1)}/k} z = u$ mit $z \neq 0$ aus $k^{(r+1)}$ deuten. Der Grad g des Zählers

von $f_u(y)$, der von u unabhängig ist, gibt eine obere Schranke für die Lösungszahl von $f_u(t) = v$ im Körper $k^{(r+1)}$. Setzt man jetzt in $f_u(t)$ für t alle in Betracht kommenden Elemente y von $k^{(r)}$ und z von $k^{(r+1)}$ ein, so erhält man den Mittelwert der Lösungszahlsumme $M(u, v) + N(u, v)$ für festes u über alle v . Da dieser Mittelwert gleich g wird, so kann man, wenn noch die möglichen Doppelwurzeln gehörig berücksichtigt werden, schließen, daß $M(u, v) + N(u, v)$ von u und v unabhängig gleich g ist. (2) ergibt dann sofort die Behauptung (1) für $r + 1$ statt r . — Für die weitere Formel von Davenport und Hasse [loc. cit. (2)]

$$\psi(m^m) \prod_{\mu=0}^{m-1} (\tau(\chi^\mu \psi) = \tau(\psi^m) \prod_{\mu=1}^{m-1} \tau(\chi^\mu) \quad (m \text{ Grad des Charakters } \chi)$$

gibt der Verf. einen Ansatz für einen Beweis, der dem obigen Beweis für (1) ähnlich ist.

Deuring (Jena).

Rados, Gustav: Über die primitiven Wurzeln zusammengesetzter Zahlen im Gauß'schen Zahlkörper. Mat. termézet. Ért. 55, 320—340 (1937) [Ungarisch].

In diesem Aufsatz wurde der Nachweis dafür geführt, daß im Gauß'schen Zahlkörper nur die zu den Typen $(1+i)^2, (1+i)^3, p^\alpha, (1+i)p^\alpha$ (T) gehörigen zusammengesetzten Zahlen primitive Wurzeln besitzen, wobei p eine beliebige ungerade zweigliedrige Komplexprimzahl sein kann. Zugleich sind die zu den Typen (T) gehörigen zusammengesetzten komplexen Zahlen die alleinigen, für die der verallgemeinerte Wilsonsche Satz in Geltung bleibt und für die die Anzahl ihrer quadratischen Reste und Nichtreste übereinstimmt, wobei jedoch p hier eine beliebige ungerade Primzahl (also auch eingliedrige) sein kann. Die analogen Stützen im natürlichen Rationalitätsbereich gelten für alle zusammengesetzten Zahlen vom Typus $2^2, p^\alpha, 2p^\alpha$, wo p eine beliebige ungerade reelle Primzahl sein kann. Bemerkenswert ist das abweichende Verhalten der obenerwähnten Tatsachen im Gauß'schen Zahlkörper.

Autoreferat.

Ljunggren, Wilhelm: Einige Eigenschaften der Einheiten reeller quadratischer und rein-biquadratischer Zahlkörper mit Anwendung auf die Lösung einer Klasse unbestimmter Gleichungen vierten Grades. Skr. norske Vid.-Akad., Oslo 1936, 1—73 (Nr 12).

Für den ersten Teil dieser Arbeit vgl. W. Ljunggren, Über die Lösung einiger unbestimmter Gleichungen vierten Grades. Avh. Norske Vid. Akad. Oslo 1935, 1—35 (Nr. 14); dies. Zbl. 11, 147; Bemerkungen über die Lösung der unbestimmten Gleichung $x^2 - Dy^4 = 1$. Norsk mat. Tidsskr. 17, 73—74 (1935); dies. Zbl. 12, 246. Mittels der Methoden dieser Arbeiten gibt Verf. im zweiten Teile u. a. die folgende Verallgemeinerung eines Tartakowskischen Satzes: Die Gleichung $Ax^4 - By^4 = \pm C$ mit $C = 1$ oder $C = 2$ hat höchstens eine Lösung in ganzen positiven Zahlen x und y . Diese Lösung kann immer berechnet werden, wenn im quadratischen Zahlringe $R(\sqrt{AB})$ die Fundamenteinheit bekannt ist. — Der Beweis dieses Satzes benutzt in weitgehender Weise den Tartakowskischen Satz: ($A = 1, B \neq 15, \pm C = 1$). Für diesen Satz, ohne die Beschränkung $B \neq 15$, gibt Verf. einen unabhängigen Beweis. Ref. betont, daß 1. den Fall $A = 1, B = 15, \pm C = 1$ S. Lubelski, dies. Zbl. 11, 98—99, erledigt hat, 2. im genannten verallgemeinerten Tartakowskischen Satze auch $A, B, 0 < A < B$, eindeutig bestimmt sind; vgl. den einfachen Beweis eines Petrschen Satzes, den S. Lubelski in der Arbeit: Zur Gauß'schen Kompositionstheorie der binären quadratischen Formen, J. reine angew. Math. 176, 59—60 (1936), dies. Zbl. 15, 59, gegeben hat. Lubelski.

Hall, Marshall: Indices in cubic fields. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 104—108 (1937).

K sei ein algebraischer Zahlkörper über dem Körper der rationalen Zahlen mit der Diskriminante d . Für die Diskriminante jeder Erzeugenden θ von K ist dann bekanntlich $d_\theta = l_\theta^2 d$. Für Körper dritten Grades wird hier gezeigt, daß der Wertevorrat von l_θ identisch ist mit der Menge der ganzen rationalen Zahlen, die durch eine binäre kubische Form angenommen werden. Für $K(D^{1/3})$ wird diese Form ex-

plizit angegeben und gezeigt, daß es zu jedem N ein D gibt, so daß in diesem Körper das kleinste $|k_\theta|$ größer als N ist.

Bruno Schoeneberg (Hamburg).

Hofreiter, Nikolaus: Diophantische Approximationen in imaginär quadratischen Zahlkörpern. Mh. Math. Phys. 45, 175—190 (1937).

Sei $K = k(\sqrt{-m})$ ein fester imaginär-quadratischer Zahlkörper und alsdann unter γ diejenige positive Körperkonstante verstanden, für die zwar für willkürliches komplexes α

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\gamma}{|q|^2}$$

stets unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen $p, q \neq 0$ aus K hat, dagegen für geeignete komplexe Zahlen β die Ungleichung

$$\left| \beta - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\gamma - \varepsilon}{|q|^2}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele solche Lösungen in ganzen Zahlen aus K besitzt. In der vorliegenden Arbeit wird an neuen Resultaten einerseits

$\gamma \geq \frac{1}{\sqrt{|4-m|}}$ für $m \equiv 3(4)$ und $\gamma \geq \left\{ \left(\frac{17-m}{4} \right)^2 + \frac{m}{4} \right\}^{-1/4}$ für $m \equiv 3(4)$ und andererseits

$$\gamma \leq \frac{\sqrt{6m}}{\pi} \text{ für } m \equiv 3(4) \quad \text{und} \quad \gamma \leq \frac{\sqrt{6m}}{2\pi} \text{ für } m \equiv 3(4)$$

bewiesen, ferner die exakte Schranke

$$\gamma = 8^{-1/4} \text{ für } m = 7$$

abgeleitet. Der letztere Beweis beruht auf geometrischen Betrachtungen mittels der zum Körper $k(\sqrt{-7})$ gehörigen sog. Picardschen Gruppe. Wegen der bisherigen Ergebnisse zum gleichen Problem s. dies. Zbl. 13, 149 (Hofreiter) und 4, 245 (Perron), ferner Perron, vgl. dies. Zbl. 7, 338 (hier weitere Literatur), und L. R. Ford, On the closeness of approach of complex rational fractions to a complex irrational number, Trans. Amer. Math. Soc. 27, 146—154 (1925).

Mahler (Krefeld).

Hofreiter, Nikolaus: Über die Endlichkeit der Klassenzahl von ganzzahligen hermiteschen Formen. Mh. Math. Phys. 45, 201—206 (1937).

Im imaginär-quadratischen Zahlkörper $k(\sqrt{-m})$ gelte der Euklidische Algorithmus; es ist also $m = 1, 2, 3, 7$ oder 11. Verf. betrachtet Hermitesche Formen

$$h = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i \bar{x}_k \quad (a_{ik} = \bar{a}_{ki}),$$

deren Koeffizienten a_{ik} ganze Zahlen aus $k(\sqrt{-m})$ sind und deren Determinante $d = |a_{ik}|$ nicht verschwindet, während die Veränderlichen x_i, \bar{x}_i konjugierte Zahlen aus $k(\sqrt{-m})$ sind. Irgend zwei solche Formen mögen als äquivalent betrachtet werden, wenn sie auseinander durch eine Transformation

$$x_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ji} x_i, \quad \bar{x}_j = \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_{ji} \bar{x}_i \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

wo die λ_{ji} ganze Zahlen aus $k(\sqrt{-m})$ mit Determinante 1 sind, hervorgehen. Dann wird bewiesen: „Es gibt nur endlich viele nichtäquivalente Hermitesche Formen mit gleichem d .“ — Im Falle $n = 2$ wurde dieses Resultat bereits von L. Bianchi, Sui gruppi di sostituzioni lineari con coefficienti appartenenti a corpi quadratici immaginari, Math. Ann. 40, 332—412 (1892), bewiesen; der allgemeine Fall wird durch Schluß von $n-1$ auf n erledigt.

Mahler (Krefeld).

Zahlentheorie:

Brauer, Alfred: Über eine Erweiterung des kleinen Fermatschen Satzes. Math. Z. 42, 255—262 (1937).

The present paper concerns a generalization of Fermat's theorem in a direction

indicated by Schur (this Zbl. 6, 248). If a_1, a_2, \dots is any sequence and if $r \neq 0$, the first derivative of this sequence is another sequence: b_1, b_2, \dots in which the n -th term is defined by $b_n = (a_{n+1} - a_n)/r^n$. The second derivative is the derivative of the first derivative and so on. The theorem of Schur states that if a is not divisible by the prime p then the first, second, \dots $(p-1)$ -st derivatives of the sequence: a, a^p, a^{p^2}, \dots with respect to p are in each case sequences of integers. Fermat's theorem is equivalent to the statement that this property is true of the first derivative. By using a different method the author proves a slightly more general result in which the prime p is replaced by an integer k for $k-1$ divisible by the exponent to which a belongs modulo k . If q is the smallest prime factor of k all the first $q-1$ derivatives of the sequence a, a^p, a^{p^2}, \dots are sequences of integers. A second theorem of Schur is generalized but the results are too complicated to quote here. *D. H. Lehmer.*

Rao, N. Rama, and N. Basavaraju: An extension of Wilson's theorem. *Bull. Calcutta Math. Soc.* 28, 235—238 (1936).

Verff. geben einen einfachen Beweis eines bekannten Satzes; vgl. L. Dickson, *History of Numbers I*, Washington 1919, S. 68 (F. Minding), S. 69 (W. Brennecke), S. 70 (A. L. Crelle), S. 72 (F. Arndt), S. 78 (M. Daniels), S. 81 (G. Miller).

Lubelski (Warschau).

Beeger, N. G. W. H.: Sur les nombres non-défectifs primitifs et les nombres multiparfaits pour un indice de multiplicité > 2 . *Nieuw Arch. Wiskde* 19, 40—49 (1936).

If m is a fixed number called the index of multiplicity and if $\sigma(N)$ denotes the sum of all the divisors of N then N is called multiply perfect, abundant, or deficient according as $\sigma(N)$ is equal to, greater than, or less than mN . A non-deficient number which is not divisible by a non-deficient number is called primitive. Every multiply perfect number is a non-deficient primitive number, but not conversely. By extending the method of Dickson [*Amer. J. Math.* 35, 413—426 (1913)] for $m=2$ to the case $m>2$ the author shows that there does not exist an infinite number of non-deficient primitive numbers prime to m and having a given number of distinct prime factors. Let f be a number all of whose prime factors divide m . Then there are only a finite number of non-deficient numbers which are multiples of f and have a given number n of distinct prime factors. If we restrict f to be a divisor of m the same conclusion cannot be inferred when $m=3$, but is true when $m=n=4$ and when $m=5$ and $n=8$. For a general m the question appears to be quite difficult. *D. H. Lehmer.*

Carmichael, R. D.: On numbers of the form $a^2 + \alpha b^2$. *Amer. Math. Monthly* 44, 81—86 (1937).

α sei eine ganze Zahl, aber keine Quadratzahl, p eine nicht in α , aber in $m^2 + \alpha n^2$ aufgehende Primzahl, wobei m, n beide zu p teilerfremd vorausgesetzt sind. Verf. stellt die Frage nach der kleinsten positiven Zahl q , für die pq in der Gestalt $a^2 + \alpha b^2$ oder $-(a^2 + \alpha b^2)$ mit zu p teilerfremden a, b darstellbar ist. Auf Grund algebraischer Identitäten und eines Reduktionsschlusses beweist er im Fall $\alpha > 0$: „Aus $p > \sqrt{4\alpha/3}$ folgt $q \leq \sqrt{4\alpha/3}$ “, und im Fall $\alpha < 0$: „Aus $p > \sqrt{|\alpha|}$ folgt $q < \sqrt{|\alpha|}$.“ Sodann behandelt er besondere Werte von α , nämlich $\alpha = 1, 2, \dots, 7, 13, 37, 43, 58, 67, 163$; $-3, -5, -10$ und schränkt für diese die durch die obigen Abschätzungen gelieferten Möglichkeiten für die Werte von q mittels der Theorie der quadratischen Reste weiter ein. Anwendungen auf bekannte Sätze über die Darstellbarkeit von Zahlen durch die Formen $a^2 + \alpha b^2$ für die genannten Werte von α und auf Formen, „die viele Primzahlen darstellen“, werden angeschlossen. Verf. beabsichtigt nicht, damit neue Resultate vorzutragen, hält aber wohl seine Beweismethode für besonders einfach und elegant. Ref. möchte hierzu bemerken: Erstens sind in den obigen Sätzen die Voraussetzungen $p > \sqrt{4\alpha/3}$ bzw. $p > \sqrt{|\alpha|}$ überflüssig. Zweitens erscheint ihm der Reduktionsschluß des Verf. durchaus nicht einfacher oder elementarer als die Schlüsse,

mit denen Lagrange [Œuvres 3, 693—795 (1773 u. 1775)] die viel weiter tragende Reduktionstheorie der binären quadratischen Formen begründet hat und aus denen er ohne überflüssige Voraussetzungen und ohne Hinzuziehung der Theorie der quadratischen Reste sämtliche Resultate der hier referierten Arbeit (bis auf die Bemerkungen über „Formen, die viele Primzahlen darstellen“) gefolgert hat. *Bessel-Hagen.*

Rados, Gustav: Ein Beitrag zur Theorie der binomischen Kongruenzen. Mat. termézet. Értés 55, 309—318 (1937) [Ungarisch].

In diesem Aufsatz wird der Nachweis für den folgenden Satz geführt. Die Kongruenz $x^n \equiv D \pmod{p}$ hat im Falle, daß D die Bedingung $D^{\frac{p-1}{n}} \equiv 1 \pmod{p}$ erfüllt und schließlich p eine Primzahl von der Gestalt $n(ne-1)+1$ (e eine ganze

positive Zahl) ist, die Zahl $\xi \equiv D^{\frac{p-1+n}{p^2}} \pmod{p}$ zur Wurzel. — Im Falle $n=2$ ist $p \equiv 3 \pmod{4}$; daher falls D quadratischer Rest von p ist, wird die Kongruenz

$x^2 \equiv D \pmod{p}$ durch die Formel $x \equiv \pm D^{\frac{p+1}{4}} \pmod{p}$ gelöst. *Autoreferat.*

Chowla, Inder: On the number of solutions of some congruences in two variables. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 5, 40—44 (1937).

Verf. beweist: Für die Anzahl N der Lösungen der Kongruenz

$$ax^m + by^n + c \equiv 0 \pmod{p^\theta}$$

mit $a, b, c \not\equiv 0 \pmod{p}$ gilt die Abschätzung

$$|N - p^\theta| \leq (m_1 - 1)(n_1 - 1)p^{\theta-1},$$

wo $m_1 = (m, p-1)$, $n_1 = (n, p-1)$.

Für $\theta=1$ war das bekannt (L. J. Mordell, dies. Zbl. 7, 5; H. Davenport-H. Hasse, dies. Zbl. 10, 338. *H. Hasse (Göttingen).*)

Gupta, Hansraj: On a conjecture of Ramanujan. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 4, 625—629 (1936).

In order to test a conjecture of Ramanujan, Lehmer has recently computed the number of unrestricted partitions of 599 and 721 (this Zbl. 14, 342). These values were found by using the Hardy-Ramanujan asymptotic formula for $p(n)$, which, at that time, was only known to give the right answer for sufficiently large values of n . Thus it could not then be asserted that the values obtained for $n=599$ and 721 were definitely correct. The author announces an extension of his table of $p(n)$ to $n=600$ and states that Lehmer's value for $p(599)$ is correct. As to $p(721)$, the author submits two tables (4 pages in extent) of $p(n)$ modulo s for $s=13$ and 19 and for all n up to 721. Thus we find that $p(721)$ is congruent to 3 modulo 13 and 18 modulo 19. These facts are in accord with Lehmer's value of $p(721)$. *D. H. Lehmer.*

Gloden, A.: Sur la représentation des nombres premiers de la forme $4r+1$ et de leurs puissances par une somme de deux carrés. Tôhoku Math. J. 42, 357—361 (1936).

Zerlegungen der 2-ten, 3-ten, . . . 10-ten Potenz der Form $m^2 + n^2$ in eine Summe von 2 Quadraten. *N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).*

Bang, A. S.: Über Zahlen, die auf zwei Weisen als Summen von fünften Potenzen geschrieben werden können. Math.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk. 14, Nr 8, 1—31 (1937) [Dänisch].

The author obtains the identity

$$(x^5 + 75y^5)^5 = (75y^5 - x^5)^5 + (x^5 + 25y^5)^5 + (x^5 - 25y^5)^5 + (10x^3y^2)^5 + (50xy^4)^5$$

obtained also by S. Sastry [J. London Math. Soc. 9, 243 (1934); this Zbl. 10, 103].

From this it can be deduced that there is an infinity of fifth powers each the sum of five fifth powers. The author obtains similar identities involving 7, 8 and 9 fifth powers. *Wright (Aberdeen).*

Chowla, Inder: On Waring's problem for cubes. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 5, 1—17 (1937).

The well-known hypothesis K of Hardy and Littlewood has been proved

false for cubes. The author proves that almost all numbers are expressible as sums of four non-negative integral cubes provided that

$$\sum_{N=1}^{\infty} r_3^2(N) = O(x^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$$

for some positive ε , where $r_3(N)$ is the number of ways in which N is a sum of 3 non-negative cubes. Wright (Aberdeen).

Sugar, Alvin: Ideal Waring theorem for the polynomial $m(x^3-x)/6-m(x^2-x)/2+x$. Amer. J. Math. **59**, 43—49 (1937).

Proof that every positive integer is a sum of $\left[\frac{m+1}{2}\right] + 3$, $m+3$ or 9 values of the polynomial for non-negative integers x according as $m \geq 36$, $35 \geq m \geq 16$, or $6 \geq m \geq 1$. Wright (Aberdeen).

Ward, Morgan: Note on divisibility sequences. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 843 bis 845 (1936).

A sequence of rational integers $u_1 u_2 u_3 \dots$ is called a divisibility sequence in case u_r divides u_s whenever r divides s . It is not assumed that the sequence is a recurring series. It is shown that if for every pair of integers a, b whose greatest common divisor is c , the greatest common divisor of u_a and u_b is u_c , then the sequence is such that if p is a prime, u_r is divisible by p^α when and only when r is divisible by the suffix of the first term of the sequence which is divisible by p^α , and conversely. It is further shown that if the sequence possesses one of these properties (and hence the other) then the product of the first k terms divide the product of any k consecutive terms of the sequence. D. H. Lehmer (Bethlehem, Pa.).

Chowla, S.: A theorem of Erdős. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **5**, 37—39 (1937).

The theorem in question (see this Zbl. **15**, 5) required for its proof a theorem of Titchmarsh, the enunciation of which was subsequently corrected by Titchmarsh in Rend. Circ. mat. Palermo **57**, 1—2 (1933). This requires a slight modification in Erdős's argument, which is carried out here, though not in the simplest possible way. Davenport (Cambridge).

Erdős, Paul: On the density of some sequences of numbers. II. J. London Math. Soc. **12**, 7—11 (1937).

In a previous paper with the same title (see this Zbl. **12**, 10) the author proved that if $f(m)$ is a non-negative arithmetical function for which

$$f(m_1 m_2) = f(m_1) + f(m_2) \quad \text{if} \quad (m_1, m_2) = 1, \quad (1)$$

and for which

$$f(p_1) \neq f(p_2) \quad (2)$$

for any two different primes p_1, p_2 , then $f(m)$ has a density-distribution, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{\substack{m \leq n \\ f(m) \geq c}} 1$$

exists and is a continuous function of c . In this paper the author proves that this result also holds when (2) is not assumed. First it is shown that it may be supposed without loss of generality that $f(p^\alpha) = f(p)$, $\sum f(p)/p$ converges, $\sum 1/p$ diverges. The

difficulty then lies in proving Lemma I of the previous paper without making use of (2). This is done by an ingenious but complicated argument, which it is impossible to sketch here. One of the arguments used is very similar to one used by Behrend (see this Zbl. **12**, 52). Davenport (Cambridge).

Siegel, Carl Ludwig: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. III. Ann. of Math., II. s. **38**, 212—291 (1937).

In diesem dritten Teil (I. dies. Zbl. **12**, 197; II. ebd. **14**, 8) werden die früher gefundenen Sätze auf ganze quadratische Formen über einem algebraischen Zahlkörper K vom Grade h übertragen. Dabei sind die Beweise für die Hilfssätze mühsamer zu führen, weil die Elementarteilerttheorie nun komplizierter ist. Besonders

erschwerend ist der Umstand, daß man unvermeidlicherweise auch ausgeartete Formen behandeln muß. Solche Formen $\mathfrak{S} = (s_{ik})$ mit $s_{ki} = s_{ik} \subset K$ ($1 \leq i, k \leq m$) und dem Rang r besitzen dann außer den schon in I. und II. berücksichtigten Einheiten \mathfrak{A} mit $\mathfrak{A}\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \mathfrak{S}$ noch Rechts- und Linkseinheiten $\mathfrak{E}_{\mathfrak{S}}^r$ und $\mathfrak{E}_{\mathfrak{S}}^l$ vom Rang r mit $\mathfrak{S}\mathfrak{E}_{\mathfrak{S}}^r = \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{E}_{\mathfrak{S}}^l\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$. Zu diesen Einheiten kann man dann ein Inverses \mathfrak{S}^{-1} vom Rang r mit $\mathfrak{S}\mathfrak{S}^{-1} = \mathfrak{E}_{\mathfrak{S}}^r$ und $\mathfrak{E}_{\mathfrak{S}}^l\mathfrak{S}^{-1} = \mathfrak{S}^{-1}$ definieren, welches jedoch von der Wahl der Einheit $\mathfrak{E}_{\mathfrak{S}}$ abhängt. Die Rolle der Determinante muß das von den r -reihigen Minoren von \mathfrak{S} erzeugte Ideal, die Diskriminante $\delta(\mathfrak{S})$, übernehmen, welches eine Geschlechterinvariante ist. Wieder findet man die Endlichkeit der Klassenzahl zu festem r und $\delta(\mathfrak{S})$. Der Hauptsatz wird nun mit der Norm Nq statt q formuliert; dabei bestehen für die Zahl ε noch ein paar Möglichkeiten mehr als in I. und II. Auch die Dimensionen der auftretenden Matrizenräume werden mit h multipliziert, die kontinuierlich veränderlichen Matrizen bekommen für jedes Matrizenelement h reelle oder h_1 reelle und h_2 komplexe Koordinaten, wenn $h = h_1 + 2h_2$ und h_1 die Anzahl der reellen Bilder von K ist. Dabei wird natürlich von einer Minimalbasis der ganzen Zahlen von K über R Gebrauch gemacht. Ausführlich wird nur der Fall $h_1 = h$ und \mathfrak{S} positiv-definit in allen Bildern behandelt, doch stellen sich unter Benutzung von II. der Übertragung auf den allgemeinen Fall keine besonderen Schwierigkeiten mehr entgegen. — Ebenso werden wieder für $h_1 = h$ die Zusammenhänge zwischen dem Hauptsatz und den Modulfunktionen n -ten Grades bewiesen. Für $h_1 \neq h$ läßt sich der Hauptsatz wohl nicht in eine einfache funktionentheoretische Identität übersetzen, wie denn auch die Definition der Modulfunktionen nur für $h_1 = h$ einen Sinn hat. — Als Anwendung behandelt Verf. die Darstellung einer Zahl t durch $\mathfrak{S} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Ist $h_1 = h$ und enthält das Geschlecht von \mathfrak{S} nur eine Klasse, so erhält man eine Formel für die Darstellungsanzahl. Unter Benutzung der Minkowskischen Abschätzung für die Körperdiskriminante zeigt Verf., daß es nur endlich viele solche Körper geben kann. — Landherr. (Rostock).

Schepel, D.: Über die Gitterpunktzahl auf und in der Umgebung gewisser Kurven. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 40, 46—54 (1937).

Einleitendes Kap. zur demnächst erscheinenden Groninger Diss. des Verf. Im Anschluß an Untersuchungen von J. G. van der Corput (Diss. Leiden, Groningen 1919; vgl. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie 2, 192, 279—302, Leipzig 1927), Th. Skolem [Math. Ann. 95, 1—68 (1926)] und S. S. Pillai (dies. Zbl. 5, 53) werden mit elementaren Methoden obere Schranken der Gitterpunktanzahl auf und in der Umgebung gewisser Kurven hergeleitet. So wird in Kap. I gezeigt (und später angewandt): Satz 1. Sei $\delta \geq 0$ und $< \frac{1}{2}$, $\alpha < \beta$, k ganz ≥ 2 , $f(u)$ in $\alpha \leq u \leq \beta$ definiert und k -mal differenzierbar mit

$$r \leq |f^{(k)}(u)| \leq R,$$

wo die positiven Zahlen r und R von u unabhängig sind. Dann ist die Anzahl der Gitterpunkte (u, v) im Streifen

$$\alpha \leq u \leq \beta, \quad -\delta \leq v - f(u) \leq \delta$$

höchstens gleich

$$k + k(\beta - \alpha) \max \left\{ R^{\frac{2}{k(k+1)}}, \left(\frac{(k+1)\delta}{r} \right)^{\frac{2}{k(k-1)}} \right\}.$$

J. F. Koksma (Amsterdam).

Gruppentheorie.

● Schur, J.: Die algebraischen Grundlagen der Darstellungstheorie der Gruppen. Vorlesungen über Darstellungstheorie. Bearb. u. hrsg. v. E. Stiefel. Zürich: 1936. 74 S.

Das Ziel dieser Ausarbeitung ist es, eine elementare Einführung in das Studium der Darstellungstheorie zu geben. Um dieses Ziel zu erreichen, werden die Hauptsätze der Darstellungstheorie auf Grund des Burnsidischen Rangsatzes und des Schurschen Lemmas hergeleitet, so daß die weitertragenden Begriffsbildungen der hyperkomplexen

Algebra nicht benötigt werden. Folgerichtig treten als Koeffizienten der darstellenden Matrizen nur die komplexen Zahlen auf. Neue Begriffe werden durch viele Beispiele illustriert. Gleichlaufend mit der allgemeinen Entwicklung wird die Darstellungstheorie der zyklischen Gruppen, der symmetrischen und alternierenden Permutationsgruppen und der Diedergruppen vorgetragen und ihre Ergebnisse werden in Tabellen zusammengestellt. Viele Einzelheiten muß sich der Leser selbst erarbeiten an Hand von Übungsaufgaben am Schlusse der Abschnitte. Darstellungstheorie der symmetrischen Permutationsgruppen nach Frobenius-Schur mit Hilfe der Charakteristiken. In Anhang wird der einfache Auerbachsche Beweis des bekannten Satzes, daß beschränkte Darstellungen äquivalent zu unitären Darstellungen sind, vorgetragen. — Durch ihren klaren Aufbau sind die Vorlesungen auch geeignet, dem Physiker ein „nützliches Werkzeug“ an die Hand zu geben. An Vorkenntnissen werden nur Kenntnisse der Matrizenrechnung und der Elemente der Gruppentheorie verlangt. Einleitung: Matrizen, lineare Transformationen, Gruppen. Kap. I: Einführung in die grundlegenden Begriffsbildungen und Methoden der Darstellungstheorie. Kap. II: Vertiefung im Spezialfall der endlichen Gruppen. Kap. III: Die Charaktere der endlichen Gruppen. Anhang: Hermitesche Darstellungen. *Zassenhaus (Hamburg).*

Frame, J. Sutherland: On the numerical determination of tables of characteristics of finite groups. *Tôhoku Math. J.* **42**, 295—299 (1936).

Ordnung, Einfachheit und die aus der Darstellungstheorie bekannten zahlen-theoretischen Bedingungen reichen aus, um die Klassenzahlen und die irreduziblen Charaktere für die beiden einfachen Gruppen mit den Ordnungen 60 und 168 eindeutig zu berechnen. *Zassenhaus (Hamburg).*

Clifford, A. H.: Representations induced in an invariant subgroup. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **23**, 89—90 (1937).

Ein irreduzibler Darstellungsmodul einer Gruppe ist Darstellungsmodul für jeden Normalteiler. Falls die Ausreduktion nach dem Normalteiler wenigstens zwei nicht-äquivalente Teilmoduln liefert, so entsteht durch Vereinigung aller äquivalenten Teilmoduln ein System der Imprimitivität für die Darstellung der ganzen Gruppe. Anwendung auf Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe. *Zassenhaus (Hamburg).*

Rabinow, David G.: Independent sets of postulates for Abelian groups and fields in terms of the inverse operations. *Amer. J. Math.* **59**, 211—224 (1937).

Der Begriff der abelschen Gruppe wird aus folgenden Axiomen der Subtraktion hergeleitet: 1. Mit a und b gehört auch $a - b$ zur Gruppe; 2. $(a - b) - c = a - (c - b)$; 3. $a - (a - b) = b$. Im 2. Abschnitt wird der Körperbegriff mit Axiomen der Subtraktion und Division begründet. *Friedrich Levi (Calcutta).*

Baer, Reinhold: Primary Abelian groups and their automorphisms. *Amer. J. Math.* **59**, 99—117 (1937).

Verf. untersucht die Beziehungen zwischen der Struktur einer primären abelschen Gruppe einerseits und ihren Automorphismengruppen andererseits. Benutzt werden dabei wesentlich die bekannten Zerlegungsgesetze primärer abelscher Gruppen. *Ulm.*

Baer, Reinhold: Dualism in Abelian groups. *Bull. Amer. Math. Soc.* **43**, 121—124 (1937).

Eine eindeutige Zuordnung der Untergruppen S, T, \dots einer abelschen Gruppe G zu den Untergruppen S', T', \dots von G heißt Dualismus, wenn aus $S \leq T$ immer $T' \geq S'$ folgt und S isomorph G/S' ist. Es wird bewiesen, daß in einer abelschen Gruppe dann und nur dann ein Dualismus besteht, wenn erstens die Ordnung eines jeden Elementes von G endlich ist, zweitens für jede Primzahl p die Untergruppe aller derjenigen Elemente von G , deren Ordnungen Potenzen von p sind, endlich ist. Verf. sieht hierin eine Ausnahme des Gesetzes, daß jeder Satz, der im Bereich der endlichen abelschen Gruppen gilt, auch für abelsche Gruppen richtig ist, deren Elemente als Ordnungen Potenzen von p haben und die auftretenden Potenzen p^n beschränkt sind. *Ulm (Münster i. W.).*

Kurosch, Alexander: Primitive torsionsfreie Abelsche Gruppen vom endlichen Range. Ann. of Math., II. s. 38, 175—203 (1937).

Untersucht werden „torsionsfreie“ abelsche Gruppen, d. h. abelsche Gruppen, die außer dem Nullelement kein Element endlicher Ordnung enthalten. Die Struktur dieser Gruppen ist wesentlich komplizierter als die der unendlichen abelschen Gruppen, die nur Elemente endlicher Ordnung enthalten und deren Struktur man bei abzählbarer Mächtigkeit der Gruppe völlig beherrscht. Verf. beschränkt sich daher auf die Untersuchung solcher Gruppen, die endlichen Ranges n sind, d. h. höchstens n linear-unabhängige Elemente enthalten. Ferner auf solche, die p -primitiv sind, d. h. in denen ein n -gliedriger Linearformenmodul existiert derart, daß G/L primär ist. Wesentliches Hilfsmittel für die Charakterisierung dieser Gruppen bildet der Ring der ganzen p -adischen Zahlen. n ist eine erste Invariante dieser Gruppen, eine weitere ist der reduzierte Rang r mit $0 \leq r \leq n$, denn es läßt sich in einer solchen Gruppe G immer ein Linearformenmodul L derart auswählen, daß G/L direkte Summe von r zyklischen Gruppen vom Typus (p^∞) wird. G wird dann völlig charakterisiert durch n, r und eine r -zeilige, $(n - r)$ -spaltige Matrix M , deren Elemente ganze p -adische Zahlen sind. Es gilt: G und G' sind dann und nur dann isomorph, wenn n, r mit bzw. n', r' übereinstimmen und die Matrizen M und M' äquivalent sind, d. h. durch gewisse Elementartransformationen ineinander übergehen. Normalformen für eine solche Matrix M werden noch nicht angegeben. Im Falle $r = 0$ bzw. $r = n$ zerfällt G in eine direkte Summe von n freien bzw. n Gruppen, die isomorph sind der Additionsgruppe der rationalen Zahlen, deren Nenner nur Potenzen von p sind. G ist ferner bei beliebigem r in eine direkte Summe von n Gruppen dieser beiden Typen zerlegbar dann und nur dann, wenn die in M auftretenden p -adischen Zahlen periodisch, d. h. rational sind. Einen wesentlichen Teil der aufgeführten Resultate findet man bereits in der Arbeit von F. Levi, Abelsche Gruppen mit abzählbaren Elementen, Leipzig 1917, die Verf. wegen der schlechten Zugänglichkeit offenbar nicht kennt. *Ulm* (Münster i. W.).

Birkhoff, Garrett: Lie groups simply isomorphic with no linear group. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 883—888 (1936).

Let G be a non-abelian Lie group of matrices with a nilpotent infinitesimal ring. It is shown that the central of G always contains a discrete subgroup N such that the Lie group G/N is isomorphic (in the pure group-theoretic sense, hence topologically) with no linear group. Thus there exist Lie groups which do not admit, in the large, of faithful representations (continuous or otherwise) by matrices. In the case of continuous representations examples of such groups have also been given by Cartan [Enseignement Math. 35, 190 (1936); this Zbl. 15, 204]. *Smith* (New York).

Analysis.

Chen, Hung-Yuan: On the function $\theta(x, h)$ in the mean-value theorem of the differential calculus. Tôhoku Math. J. 42, 248—273 (1936).

Die Funktion $\theta(x, h)$ aus dem Mittelwertsatze $f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h)$, $0 < \theta < 1$, wird eingehend auf Eindeutigkeit, Stetigkeit und Differenzierbarkeit untersucht. Die diesbezüglichen Ergebnisse von Hedrick [Ann. of Math. (2) 7 (1906)] und R. Rothe [Math. Z. 9 (1921)] werden ergänzt, z. B.: Es sei $n \geq 3$, $f''(a) \neq 0$ und $f^{(n)}(x)$ existiere um $x = a$. Dann ist $\theta(x, h)$ um $x = a$, $h = 0$ eindeutig, und alle partiellen Ableitungen bis zur $(n - 2)$ -ten Ordnung sind dort total differenzierbar. Wenn $f(x)$ um $x = a$ in eine Taylorsche Reihe entwickelbar und $f''(a) \neq 0$ ist, so ist auch $\theta(x, h)$ um $x = a$, $h = 0$ in eine Taylorsche Reihe entwickelbar, die explizit angegeben wird und mit

$$\theta(x, h) = \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \frac{f'''(a)}{f''(a)} h + \frac{1}{2!} \frac{1}{24} \left\{ \frac{f^{(4)}(a)}{f''(a)} - \left[\frac{f'''(a)}{f''(a)} \right]^2 \right\} (h^2 + 2h(x - a)) + \dots$$

beginnt. *Rogosinski* (Berlin).

Photopoulos, A. P.: Über einige Formeln der Integralrechnung nebst einigen Anwendungen. Bull. Soc. Math. Grèce 17, 104—107 (1937) [Griechisch].

Beweis des Zwischenwertsatzes: Sind die Funktionen $\sigma(x)$, $\varphi(x)$, $f(x)$ im Intervall $[\alpha, \beta]$ stetig, so gibt es Zahlen ξ, η, ζ mit $\alpha < \xi < \beta$, $\alpha < \eta < \beta$, $\alpha < \zeta < \beta$, für die

$$\frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx}{\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x) dx} = \frac{\varphi(\xi) f(\eta)}{\sigma(\xi) \varphi(\eta)} = \frac{f(\zeta)}{\sigma(\zeta)}.$$

Drei einfache Anwendungsbeispiele.

Bessel-Hagen (Bonn).

Schaurhofer, Margarete: Über das Integral $\int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-e^x} dx$ und ein ähnlich gebildetes. Mh. Math. Phys. 45, 120—132 (1937).

In der vorliegenden Note, die einen Auszug aus der Dissertation der Verf. darstellt, wird in Kapitel 1 eine asymptotische Formel für das Integral

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-e^t} dt$$

bei großem $n > 0$ abgeleitet; man vergleiche wegen des ähnlichen Integrales

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt$$

die beiden Arbeiten (Mh. Math. Phys. 37, 343 u. dies. Zbl. 4, 66) von W. Wirtinger. Im 2. Kapitel werden Integrale der Form

$$\int_{-\infty + x''i}^{+\infty + x''i} x^{z-1} e^{-e^x} dx,$$

wo $\cos x'' < 0$ ist (diese Einschränkung wird aus Konvergenzgründen gemacht) und wo der Integrationsweg nicht durch den Nullpunkt geht, eingehend untersucht.

Mahler (Krefeld).

Landau, Edmund: Über mehrfach monotone Folgen. Prace mat.-fiz. 44, 337—351 (1937).

Für eine Folge A reeller Zahlen A_ν , $0 \leq \nu \leq n$, mit $A_0 = 0$, $A_n = 1$ werde

$$D(A) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n A_\nu^2 - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{\nu=1}^n A_\nu \right)^2 \text{ gesetzt; dann ist stets } D(A) \geq 0. \text{ Es bezeichne } E_n(k)$$

für $1 \leq k \leq n$ das Maximum von $D(A)$ für alle k -fach monotonen Folgen A . Bekannt war (vgl. Grüss, dies. Zbl. 10, 16; Landau, dies. Zbl. 10, 396), daß $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(1) = \frac{1}{4} = \frac{2}{9} \frac{2}{0} \frac{5}{0}$, dagegen $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(n) = \frac{4}{5} = \frac{8}{9} \frac{0}{0}$. Angeregt durch einen Brief von v. Mises, der einen Beweis von $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(2) = \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \frac{0}{0}$ enthielt, untersucht der Verf. jetzt $E_n(k)$ für $n \rightarrow \infty$ und beliebige k . Zunächst wird ein anderer Beweis des v. Mises'schen Resultats gebracht, dann $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(3) = \frac{1}{10} = \frac{8}{9} \frac{1}{0}$ bewiesen und schließlich das überraschende Ergebnis $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(k) = \frac{4}{5} = \frac{8}{9} \frac{0}{0}$ für alle $k \geq 4$ hergeleitet.

Der Beweis beruht auf der bekannten Normalform für k -fach monotone Folgen A , nämlich

$$A_\nu = \sum_{l=1}^{k-1} \binom{\nu}{l} p_l + \sum_{l=k}^n \binom{\nu-l+k-1}{k-1} p_l, \text{ wo alle } p_l \geq 0, \sum_{l=1}^{k-1} \binom{n}{l} p_l + \sum_{l=k}^n \binom{n-l+k-1}{k-1} p_l = 1$$

und $\binom{a}{b} = 0$ für $a < b$. Er hätte sich durch Heranziehung der Konvexität von $\sqrt{D(A)}$ etwas übersichtlicher gestalten lassen. Nach der Normalform ist ja die Menge aller k -fach monotonen Folgen A die konvexe Hülle der aus den n Folgen $A_\nu = \binom{\nu}{l} / \binom{n}{l}$

$(1 \leq l \leq k-1)$, $A_\nu = \binom{\nu-l+k-1}{k-1} / \binom{n-l+k-1}{k-1}$ ($k \leq l \leq n$) gebildeten Menge, und $E_n(k)$ ist deshalb einfach das Maximum von $D(A)$ für diese n Folgen. Eine leichte Abschätzung zeigt nun, daß für $k \geq 4$ und große n dieses Maximum immer der Wert von $D(A)$ für die Folge $A_\nu = \binom{\nu}{2} / \binom{n}{2}$ ist, dessen Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ eben $\frac{1}{45}$ ist. Dagegen wird für $k=2$ und 3 und große n das Maximum für eine der Folgen $A_\nu = \binom{\nu-l+k-1}{k-1} / \binom{n-l+k-1}{k-1}$ erreicht, wodurch für $n \rightarrow \infty$ die größeren Grenzwerte $\frac{1}{3}$ und $\frac{9}{100}$ herauskommen. (Vgl. zum selben Fragekreis Hardy, dies. Zbl. 14, 298.)

B. Jessen (Kopenhagen).

Toda, Kiyoshi: A method of approximation of convex functions. Tôhoku Math. J. 42, 311—317 (1936).

Eine in $a \leq x \leq b$ stetige konvexe Funktion $f(x)$ kann bekanntlich durch stückweise lineare Funktionen der Form $\sum_{i=0}^l p_i |x - a_i| + c$, $p_i > 0$, approximiert werden.

Dies wird vom Verf. aufs neue bewiesen und zu einfachen Herleitungen der Jensenschen und einer von ihm früher bewiesenen allgemeineren Ungleichung verwendet [vgl. dies. Zbl. 11, 205, (*)]. Ferner setzt Verf. die Untersuchung des im genannten Ref. angeführten Ausdrucks fort und zeigt, daß dieser nur dann ein von den x unabhängiges Vorzeichen hat, wenn $r=1$ und $\varphi(x)$ konvex oder konkav ist. W. Fenchel.

Malchair, Henri: Quelques propriétés des suites non croissantes ou non décroissantes de fonctions sousharmoniques. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 5, 148—152 (1936).

Let $f_n(x, y)$ denote a sequence of subharmonic functions which converge in a domain D to a subharmonic function $f(x, y)$. Let D_m denote a nested sequence of Dirichlet domains which converge to D and let $\beta_m(x, y)$ be the best harmonic majorant of $f_m(x, y)$ in D_m . The purpose of the paper is to establish conditions under which $\beta_m(x, y)$ converges to the least harmonic majorant of $f(x, y)$ in D . The author proved previously (see this Zbl. 14, 22) that this is the case if $f_n(x, y)$ converges uniformly to $f(x, y)$. In the present paper it is proved that the same is true if $f_n(x, y)$ is a non-decreasing sequence. It is also shown that if $f_n(x, y)$ is a non-increasing sequence and if $f(x, y)$ is harmonic in D , then there exists a subsequence $f_{n_j}(x, y)$ such that if $\beta_{n_j}^*(x, y)$ denotes the best harmonic majorant of $f_{n_j}(x, y)$ in D_{n_j} , then $\beta_{n_j}^*(x, y)$ converges to $f(x, y)$ in D . The proofs depend upon elementary ε -arguments. Radó.

Besicovitch, A. S., and H. D. Ursell: Sets of fractional dimensions. V. On dimensional numbers of some continuous curves. J. London Math. Soc. 12, 18—25 (1937).

Es werden folgende zwei Sätze bewiesen: 1. Die Dimensionszahl d der Kurve $y=f(x)$, wo $f(x)$ einer Lipschitzbedingung vom Exponenten δ im Intervall $0 \leq x \leq 1$ genügt, genügt der Ungleichung $1 \leq d \leq 2 - \delta$. (I)

Falls $f(x)$ überall eine endliche Ableitung hat, ist also $d=1$. — 2. Es gibt Kurven $y=f(x)$ der vorigen Art, für die d einen willkürlich vorgeschriebenen Wert aus (I) wirklich annimmt. — Vgl. die vorangehenden gleichnamigen Arbeiten I—IV des ersten Verf. (dies. Zbl. 9, 53, 395 u. 10, 14). Mahler (Krefeld).

Haviland, E. K., and Aurel Wintner: On the Fourier transforms of distributions on convex curves. Duke math. J. 2, 712—721 (1936).

Eine Parameterdarstellung $(x, y) = (x(\varphi), y(\varphi))$, wo $0 \leq \varphi < 2\pi$, einer konvexen Jordankurve bestimmt eine Verteilungsfunktion $\sigma = \sigma(E)$ in der Ebene, indem man für jede Borelmenge E unter $\sigma(E)$ das durch 2π dividierte lineare Maß der Menge derjenigen φ versteht, für welche $(x(\varphi), y(\varphi))$ in E liegt. Die Fouriertransformierte von σ ist

$$A(u, v; \sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(ux + vy)] d_{xy} \sigma(E) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i(u x(\varphi) + v y(\varphi))] d\varphi.$$

Für $(x(\varphi), y(\varphi)) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ gilt $A(r \cos \varphi, r \sin \varphi; \sigma) = J_0(r)$. In Verallgemeinerung der bekannten Abschätzung $J_0(r) = O(r^{-\frac{1}{2}})$ gilt (vgl. Wintner u. Ref., dies. Zbl. 14, 154) unter recht allgemeinen Voraussetzungen über $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$, daß $A(r \cos \varphi, r \sin \varphi; \sigma) = O(r^{-\frac{1}{2}})$ gleichmäßig in φ . In der vorliegenden Arbeit wird in Verallgemeinerung der bekannten Formel $J_0(r) = r^{-\frac{1}{2}}(2/\pi)^{\frac{1}{2}} \cos(r - \pi/4) + O(r^{-1})$ unter etwas spezielleren, aber ebenfalls sehr allgemeinen Voraussetzungen über $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$ eine gleichmäßig in φ geltende Formel $A(r \cos \varphi, r \sin \varphi; \sigma) = r^{-\frac{1}{2}}A(r, \varphi) + O(r^{-1})$ abgeleitet, wobei der Koeffizient $A(r, \varphi)$ eine explizit angegebene beschränkte Funktion von r und φ ist.

B. Jessen (Kopenhagen).

Kampen, E. R. van, and Aurel Wintner: Convolutions of distributions on convex curves and the Riemann zeta function. Amer. J. Math. 59, 175—204 (1937).

Nach Untersuchungen von Bohr, Wintner u. Ref. (dies. Zbl. 3, 389; 7, 157 u. insbes. 14, 154) besitzt die Funktion $\log \zeta(\sigma + it)$ für jedes $\sigma > \frac{1}{2}$ eine asymptotische Verteilungsfunktion ψ_σ , welche totalstetig ist mit einer unendlich oft differenzierbaren Dichte $d^\sigma(x, y)$. Für $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ ist $d^\sigma(x, y)$ eine ganze transzendente Funktion von x und y ; dagegen ist $d^\sigma(x, y)$ für $\sigma > 1$ trivialerweise nicht analytisch für alle x, y , z. B. nicht für die Randpunkte des Spektrums von ψ_σ . Diese Ergebnisse sind auf Grund einer Abschätzung der Fouriertransformierten von ψ_σ bewiesen worden. In der vorliegenden Arbeit wird nun für hinreichend große σ ringförmige Teilgebiete des Spektrums angegeben, worin $d^\sigma(x, y)$ analytisch ist. Diese Aufgabe läßt sich mit Hilfe der Fouriertransformierten nicht behandeln, sondern fordert eine weitere Ausgestaltung des geometrischen Apparates bez. der Faltung von Verteilungsfunktionen auf konvexen Kurven. Wie bekannt, ist nämlich $\psi_\sigma = \varphi_{1,\sigma} * \varphi_{2,\sigma} * \dots$, wobei die einzelnen $\varphi_{n,\sigma}$ derartige Verteilungsfunktionen sind; für die Dichte $d_n^\sigma(x, y)$ der endlichen Faltung $\psi_{n,\sigma} = \varphi_{1,\sigma} * \dots * \varphi_{n,\sigma}$ läßt sich nun durch verwickelte aber ganz elementare Betrachtungen (die übrigens nur für $n = 2$ durchgeführt sind) nachweisen, daß sie für hinreichend große σ außer auf 2^{n-1} ringförmig angeordneten konvexen Kurven analytisch ist; hieraus ergibt sich das Ergebnis durch einen Grenzübergang. Die Frage, ob $d^\sigma(x, y)$ überhaupt Singularitäten im Innern des Spektrums besitzt, bleibt unentschieden. Zur Einleitung wird die entsprechende Untersuchung für Funktionen $f(t) = \sum a_n e^{i\lambda_n t}$ mit rational unabhängigen λ_n bzw. für $\zeta'(\sigma + it)/\zeta(\sigma + it)$ durchgeführt; in diesen Fällen sind die konvexen Kurven Kreise, und die Diskussion verläuft einfacher. In einem Anhang wird eine frühere entsprechende Untersuchung von Kershner und Wintner (dies. Zbl. 13, 112) über Funktionen $f(t) = \sum a_n \cos \lambda_n(t - \delta_n)$ mit rational unabhängigen λ_n in verschiedener Weise vervollständigt, insbesondere dadurch, daß in diesem Fall unter geeigneten Voraussetzungen über die a_n das Auftreten von Singularitäten im Innern des Spektrums nachgewiesen wird.

B. Jessen.

Kershner, Richard: On the values of the Riemann ζ -function on fixed lines $\sigma > 1$. Amer. J. Math. 59, 167—174 (1937).

Weiterführung einer Untersuchung von Bohr u. Ref. (dies. Zbl. 13, 114). Indem $M(\sigma)$ für $\sigma > 1$ die abgeschlossene Hülle der Wertemenge von $-\log \zeta(\sigma + it)$, $-\infty < t < \infty$, bedeutet, wurde dort die Existenz einer Konstanten C ($\approx 1,764$) bewiesen derart, daß $M(\sigma)$ für $\sigma \leq C$ ein konvexer Bereich, dagegen für $\sigma > C$ ein konvexer Ringbereich ist. Ferner wurde dort ohne Beweis die Existenz einer Konstanten E ($\approx 1,778$) erwähnt derart, daß für $C < \sigma < E$ die innere Randkurve genau zwei Ecken besitzt, welche auf der reellen Achse liegen, während für $\sigma \geq E$ die innere Randkurve keine Ecken besitzt. In der vorliegenden Arbeit wird auf Grund der Ergebnisse einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 15, 120) ein detaillierter Beweis dieses Satzes gegeben und außerdem insbesondere die Krümmung der inneren Randkurve und (für $C < \sigma < E$) der Winkel an den Ecken diskutiert.

B. Jessen (Kopenhagen).

Sheffer, I. M.: A correction. Trans. Amer. Math. Soc. 41, 153—159 (1937). Cf. this Zbl. 15, 12.

Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

{Marcinkiewicz, J.: Sur l'interpolation. I. Studia Math. 6, 1—17 (1936).

{Marcinkiewicz, J.: Sur l'interpolation. II. Studia Math. 6, 67—81 (1936).

The author undertakes a systematical study of the trigonometric polynomials $U_n(x)$ of respective degrees n which interpolate a given periodic function $f(x)$ at $2n+1$ equidistant points of the interval $(0, 2\pi)$ of periodicity. In the first note continuous functions are considered. This condition does not imply the summability of $\{U_n(x)\}$. We have however uniform convergence if $f(x)$ has an absolutely convergent Fourier series or certain conditions concerning the Fourier constants are satisfied. For continuous

functions $n^{-1} \sum_{\nu=0}^n |U_{n\nu}(x) - f(x)| \rightarrow 0$ holds where $U_{n\nu}(x)$ denote the "sections" of $U_n(x)$;

furthermore $\int_0^{2\pi} |U_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0$. — In the second part, the sequence $\{U_n(x)\}$ is studied if $f(x)$ is absolutely continuous, $f(0) = f(2\pi) = 0$ and $\int_0^{2\pi} |f'(x)|^p dx$ exists. Then

$U'_n(x_0) \rightarrow f'(x_0)$ provided $p = 1$ and $t^{-1}\{f(x_0+t) - f(x_0-t)\}$ is of bounded variation and continuous for $t = 0$. Furthermore the following theorem of Kolmogoroff type is proved: Let $p = 2$; then $\{U'_{n\nu}(x)\}$ converges almost everywhere provided

$n_{\nu+1}/n_\nu > 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. For a general $p > 1$ we have $\int_0^{2\pi} |U'_n(x) - f'(x)|^p dx \rightarrow 0$.

Finally analogs of the theorem of Young-Hausdorff are obtained. *G. Szegő.*

Curtiss, J. H.: A note on the degree of polynomial approximation. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 873—878 (1936).

Let C_1, C_2, \dots, C_l be mutually exterior analytic Jordan curves, $f_\nu(z)$ regular interior to C_ν and continuous in the closed interior of C_ν ; let $f_\nu^{(\alpha)}(z)$ satisfy a Lipschitz condition of the exponent α ($\nu = 1, 2, \dots, l$). Then a sequence of polynomials $p_n(z)$ of respective degrees n can be obtained such that $p_n(z)$ approximates the given functions simultaneously with an error $O(n^{-j-\alpha})$. The construction of $p_n(z)$ is similar to that in the case $l = 1$. *G. Szegő (St. Louis, Mo.).*

Keldyš, M.: Sur une classe de polynômes extrémaux. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 4, 171—174 (1936).

Let Γ be a rectifiable Jordan curve in the plane containing the origin, $f(z) = w$, $w = \varphi(w)$, the function mapping the interior of Γ onto $|w| < 1$, $f(0) = 0$. We consider the class characterized by the boundedness of

$$\int_{|w|=r} |F\{\varphi(w)\}|^p |\varphi'(w)| |dw|, \quad (r < 1),$$

where p is a fixed positive number, and by the condition $F(0) = 0$. Let $F_0(z)$ minimize $\int_\Gamma |F(z)|^p |dz|$ ($F(z)$ has L^p -integrable boundary values) and let $q_n(z)$ be the polynomial minimizing this integral for the subclass of the polynomials of the degree n . Then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Gamma |F_0(z) - q_n(z)|^p |dz| = 0.$$

The function $F_0(z)$ is closely related to the map-function (Julia, Bull. Soc. Math. France 1928), the polynomials $q_n(z)$ for $p = 2$ to the orthogonal polynomials introduced by the reviewer. *G. Szegő (St. Louis, Mo.).*

Krall, H. L.: On higher derivatives of orthogonal polynomials. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 867—870 (1936).

The only set of orthogonal polynomials (with a proper weight function) for which the r -th derivatives form an orthogonal set, is the system of Jacobi polynomials. In case $r = 1$ this theorem is due to W. Hahn, and a second proof is due to the author (Bull. Amer. Math. Soc. 42, 423; this Zbl. 14, 399). *G. Szegő (St. Louis, Mo.).*

Reihen:

Garten, V., und K. Knopp: Ungleichungen zwischen Mittelwerten von Zahlenfolgen und Funktionen. Math. Z. 42, 365—388 (1937).

Seien $C_n^{(k)} = \frac{1}{\binom{n+k}{n}} \sum_{\nu=0}^n \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} s_\nu$, die $C(k)$ -Mittel und $A(x) = (1-x) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu$,

die A -Mittel der Folge s_n und $\liminf_{n \rightarrow \infty} C_n^{(k)} = c_k$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} C_n^{(k)} = C_k$, $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = c_\infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = C_\infty$, $\liminf_{x \rightarrow 1} A(x) = a$, $\limsup_{x \rightarrow 1} A(x) = A$ gesetzt, für welche Werte auch $\pm \infty$ zugelassen wird. — Verff. geben die bestmöglichen Beziehungen zwischen den Oszillationsgrenzen der $C(k)$ - bzw. A -Verfahren im Falle, daß s_n oder irgendeine seiner $C(r)$ -Mittel einseitig beschränkt ist, in folgender Form: Ist $r > -1$ und $C_n^{(r)} \geq 0$, so gilt für $l > k \geq 1$: $\gamma_k^{(r)} C_{r+k} \leq \gamma_l^{(r)} C_{r+l}$, $\bar{\gamma}_k^{(r)} C_{r+k} \geq \bar{\gamma}_l^{(r)} C_{r+l}$ und $\gamma_k^{(r)} C_{r+k} \leq e^{r+1} A$, wobei $\gamma_k^{(r)} = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(r+k+1)} \cdot \frac{(r+k)^{r+k}}{(k-1)^{k-1}}$, $\gamma_1^{(r)} = \frac{(r+1)^{r+1}}{\Gamma(r+2)}$, $\bar{\gamma}_k^{(r)} = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(r+k+1)}$ ist. Durch

Beispiele wird gezeigt, daß hier die Konstanten γ die bestmöglichen sind. In diesen Ergebnissen ist die von V. Ramaswami (vgl. dies. Zbl. 12, 403) bewiesene Äquivalenz des $C(\infty)$ - und A -Verfahrens enthalten, womit ein kürzerer und übersichtlicher Beweis dieser Tatsache gegeben wird. — Es werden weiter entsprechende Ergebnisse einer-

seits zwischen den $E(k)$ - $\left(2^{-kn} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (2^k - 1)^{n-\nu} s_\nu\right)$ und B - $\left(e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} s_\nu\right)$ Verfahren, andererseits zwischen den Riesz'schen Mitteln $kx^{-k} \int_0^x (x-t)^{k-1} s(t) dt$ und dem Laplaceschen Integral $x \int_0^\infty e^{-tx} s(t) dt$ wie auch den Hölderschen Mitteln

$\left(H(k) : \frac{1}{\Gamma(k)} \frac{1}{x} \int_0^x (\log x/t)^{k-1} s(t) dt\right)$ gegeben. — Endlich wird durch ein Beispiel gezeigt, daß die $C(\infty)$ - und $H(\infty)$ -Verfahren nicht mehr äquivalent sind. Karamata.

Lammell, Ernst: Über gewisse Reihen, welche die Potenzreihen als Grenzfall enthalten. Math. Z. 42, 389—398 (1937).

Verf. behandelt die Frage: Wie muß eine Folge von Punkten $\{\alpha_\nu\}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) des Kreises $|z| = R$ ($R > 0$) beschaffen sein, damit jede in $|z| < R$ reguläre Funktion $f(z)$ in eindeutiger Weise durch eine Reihe der Form

$$A_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \prod_{\nu=1}^{\mu} \frac{\alpha_\nu z}{\alpha_\nu - z} \quad (1)$$

darstellbar ist? [Diese Reihen enthalten als Grenzfall ($R \rightarrow \infty$) die Potenzreihen.] Er zeigt: Notwendig und hinreichend hierfür ist die Gleichverteilung der Folge $\{\alpha_\nu\}$ auf $|z| = R$ im Sinne von Weyl [Math. Ann. 77, 313—352 (1916)]. — Ist $\{\alpha_\nu\}$ auf $|z| = R$ gleichverteilt und $f(z)$ in $|z| < R$ regulär, so gilt für die durch $f(z)$ eindeutig bestimmten Entwicklungskoeffizienten A_μ (die sich durch gewisse Integrale ausdrücken lassen)

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \sqrt[\mu]{|A_\mu|} \leq 1/R. \quad (2)$$

Umgekehrt: Unter der Voraussetzung der Gleichverteilung von $\{\alpha_\nu\}$ auf $|z| = R$ ist eine Reihe der Form (1) genau dann für alle $|z| < R$ konvergent, wenn (2) erfüllt ist; sie konvergiert dann in jedem Kreis $|z| \leq R_1 < R$ gleichmäßig, stellt also eine in $|z| < R$ reguläre Funktion dar.

Silverman, L. L.: Products of Nörlund transformations. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 95—101 (1937).

Unter dem symmetrischen Produkt $P \circ Q$ zweier durch die Folgen (p_n) , (q_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) definierter Nörlund-Transformationen P, Q [vgl. für die Definition

F. Lösch (Stuttgart).

der Nörlund-Transformation etwa: L. L. Silvermann und J. D. Tamarkin, Math. Z. **29**, 161—170 (1928)] versteht Verf. die durch die Folge $(p_0 q_n + p_1 q_{n-1} + \dots + p_n q_0)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) definierte Nörlund-Transformation. Die vorliegende Note hat das Ziel, das Wirkungsfeld des symmetrischen Produkts $P \circ Q$ mit dem des gewöhnlichen Produkts PQ zu vergleichen. — Bedeutet M die Bildung der arithmetischen Mittel (spezielle Nörlund-Transformation), P eine beliebige, durch die Folge (p_n) definierte Nörlund-Transformation, so lauten die Hauptergebnisse: (1) Das Wirkungsfeld des Produkts MP umfaßt dasjenige des Produkts $M \circ P$. (2) Das Umgekehrte gilt nicht für jede Transformation P . (3) Notwendig und hinreichend für die Äquivalenz der beiden Transformationen MP und $M \circ P$ ist das Bestehen der Ungleichung

$$(n+1)(p_0 + p_1 + \dots + p_n) < K \sum_{\nu=0}^n (p_0 + p_1 + \dots + p_\nu)$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten K .

F. Lösch (Stuttgart).

Seybold, Jakob: Ein Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen. Tübingen: Diss. 1936. 51 S. u. 7 Fig.

The author is concerned with D_{λ_n} -summability of power series, i.e., with the domain of existence of

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \sigma} z^n,$$

where $0 < \lambda_n < \lambda_{n+1} \uparrow \infty$, and as usual the problem is reduced to the case of the geometric series. The cases $\lambda_n = n^\alpha$ and $\lambda_n = n^\alpha (\log n)^{\beta_1} \dots (\log_k n)^{\beta_k}$ are carried through in detail. — The author seems to have overlooked the paper by E. Lindelöf in J. Math. pures appl., V. s. **9**, 213—221 (1903) which contains some of his basic results.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Spezielle Funktionen:

Vilímek, V.: Le développement de la fonction gamma en séries de facultés des fonctions similaires. Publ. Fac. Sci. Univ. Charles Nr **150**, 38—42 u. franz. Zusammenfassung 42 (1936) [Tschechisch].

Lagrange, René: Sur les théorèmes d'addition des fonctions de Legendre. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 1225—1227 (1936).

The author indicates two identities involving the functions $P_n^m(z)$ and $Q_n^m(z)$ in the usual notation and generalizing certain classical identities (see this Zbl. **15**, 303).

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Erdélyi, A.: Sulla generalizzazione di una formula di Tricomi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **24**, 347—350 (1936).

In this paper a generalisation is given of Tricomi's formula

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} [L_n(a) - L_{n-1}(a)][L_n(b) - L_{n-1}(b)] = e^{\min(a,b)}$$

where $L_n(x)$ is Laguerre's polynomial. If

$$N_{k,m}(t) = \frac{t^{m-\frac{1}{2}}}{\Gamma(2m+1)} M_{k,m}(t) = \frac{t^{2m} e^{-\frac{1}{2}t}}{\Gamma(2m+1)} {}_1F_1(\frac{1}{2} + m - k; 2m + 1; t),$$

it is shown that

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu+n)}{n!} N_{k+n,m}(a) N_{k+n,m}(b) = \int_0^{\min(a,b)} N_{k-\nu,m-\nu}(a-u) N_{k-\nu,m-\nu}(b-u) u^{2\nu-1} du,$$

where a and b are real, and $R(m) + \frac{1}{2} > R(\nu) > 0$. — To prove this result use is made of Laplace transforms. Some particular cases of the formula are given. For instance

$$\begin{aligned} (ab)^{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2m+n)\Gamma(2m+n+1)} L_n^{(2m)}(a) L_n^{(2m)}(b) &= \int_0^{\min(a,b)} u^{2m-1} e^u du \\ &= (-1)^{2m} \gamma[2m, -\min(a,b)], \end{aligned}$$

where $\gamma(\nu, x)$ is the incomplete gamma function. For $m = \frac{1}{2}$, this gives Tricomi's formula.
W. N. Bailey (Manchester).

Erdélyi, Artur: Über die erzeugende Funktion der Jacobischen Polynome. J. London Math. Soc. 12, 56—57 (1937).

It is shown here that the generating function of Jacobi polynomials can be expressed in terms of Appell's hypergeometric function of two variables of the second kind. Defining $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ by the relation

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (-1)^n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} {}_2F_1(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x),$$

the formula is

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n (e^{-u})^n P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos 2\varphi) P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos 2\Phi) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)} \left(\frac{e^u}{4}\right)^{\alpha + \beta + 1} \cosh u [\sinh u - i \cos(\varphi - \Phi)]^{-\alpha - \beta - 2} \\ & \times F_2\left(\alpha + \beta + 2; \alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}; 2\alpha + 1, 2\beta + 1; \right. \\ & \quad \left. \frac{2i \sin \varphi \sin \Phi}{\sinh u - i \cos(\varphi - \Phi)}, \frac{2i \cos \varphi \cos \Phi}{\sinh u - i \cos(\varphi - \Phi)}\right), \end{aligned}$$

where

$$c_n = (2n + \alpha + \beta + 1) \frac{n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{2^{\alpha + \beta + 1} \Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}.$$

W. N. Bailey (Manchester).

Erdélyi, Artur: Zur Theorie der Kugelwellen. Physica 4, 107—120 (1937).

In this paper the author first obtains solutions of the wave equation in spherical polar coordinates, two such solutions being

$$u_n^m = i^n \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

and

$$v_n^m = i^n \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

where m, n are integers, positive or zero. — It is shown that u_n^m can be obtained from $u_0 (\equiv u_0^0)$ by differentiation, the formula being

$$u_n^m = (-D)^m P_n^{(m)}\left(\frac{\partial}{\partial i k z}\right) u_0,$$

where

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial i k x} + i \frac{\partial}{\partial i k y} = e^{i\varphi} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial i k r} + \frac{\cos \theta}{i k r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{i k r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]$$

and $P_n^{(m)}(x) \equiv \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$. — An integral representation of u_n^m is given, namely

$$u_n^m = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{i k r \cos \gamma} P_n^m(\cos \theta') e^{im\varphi'} \sin \theta' d\varphi' d\theta'$$

where $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi' - \varphi)$. Further formulae are obtained, such as

$$v_n^m = \frac{i^m}{i k} \int_0^\infty e^{-|z| \sqrt{\lambda^2 - k^2}} J_m(\lambda \varrho) P_n^m\left(\frac{i}{k} \sqrt{\lambda^2 - k^2}\right) \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} e^{im\varphi}.$$

These results reduce to known results when $m = n = 0$. Finally the limiting case when $k \rightarrow 0$ is discussed, when a known formula in potential theory is derived. *Bailey*.

Sen, D. N., and V. Rangachariar: Generalized Jacobi polynomials. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 901—908 (1936).

The number of real zeros of the generalized Jacobi polynomials and their location has been amply investigated. The authors consider this question again, especially the case in which both parameters are negative. They use Sturm's method. *G. Szegő*.

Whipple, F. J. W.: Well-poised hypergeometric series and cognate trigonometric series. Proc. London Math. Soc., II. s. 42, 410—421 (1937).

Contour integrals of Barnes' type are used to obtain relations involving well-poised hypergeometric series of any order. The same method is also used to obtain relations involving trigonometric series. If u_n is the typical term of the series

$${}_rF_{r-1} \left[\begin{matrix} a, b, c, \dots \\ 1+a-b, 1+a-c, \dots \end{matrix} \right],$$

then the series with typical term $(-1)^n u_n \sin(a+2n)\theta$ is denoted by

$${}_r\Phi_{r-1} \left[\begin{matrix} a, b, c, \dots; \theta \\ 1+a-b, 1+a-c, \dots \end{matrix} \right].$$

The following are examples of the results obtained:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(b-a)}{\Gamma(1-c)\Gamma(1+a-c)} {}_3\Phi_2 \left[\begin{matrix} a, b, c; \theta \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix} \right] + \frac{\Gamma(2b-a)\Gamma(b)\Gamma(a-b)}{\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+b-c)} {}_3\Phi_2 \left[\begin{matrix} 2b-a, b, b+c-a; \theta \\ 1+b-a, 1+b-c \end{matrix} \right] = 0,$$

provided that either $s > 0, -\pi \leq 2\theta \leq \pi$, or else $0 \geq s > -1, -\pi < 2\theta < \pi$, where $s = 2 + a - 2b - 2c$;

$$\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)\Gamma(b-a)\Gamma(c-a) {}_3\Phi_2 \left[\begin{matrix} a, b, c; \theta \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix} \right] + \Gamma(2b-a)\Gamma(b)\Gamma(b+c-a)\Gamma(a-b)\Gamma(c-b) {}_3\Phi_2 \left[\begin{matrix} 2b-a, b, b+c-a; \theta \\ 1+b-a, 1+b-c \end{matrix} \right] + \text{idem } (b \rightleftharpoons c) = 0,$$

provided that either $s > 0, -3\pi \leq 2\theta \leq 3\pi$, or else $0 \geq s > -1, -3\pi < 2\theta < 3\pi$, and idem $(b \rightleftharpoons c)$ stands for "the same expression with b and c interchanged". — Corresponding results are obtained for series of cosines, and the particular cases involving two or three generalized hypergeometric series with unit argument are given in detail. W. N. Bailey (Manchester).

Shabde, N. G.: On some results involving confluent hypergeometric functions. Indian Math. Soc., N. s. 2, 167—171 (1936).

The author first gives the operational representations of $\ker(x)$, $\text{kei}(x)$ and their fold. He next obtains an expansion for $k_{2n}(x)k_{2n}(y)$ as a series running from $r=0$ to $r=n-1$ of terms of type $(4xy)^{r+1}c_r \exp(-x-y)L_{n-r-1}^{2r+1}(2x+2y)$, where $(n!)^2 r!(r+1)!$ is equal to $(n-r)!(n-r-1)!$. He next puts $x=y$ in this result and then expresses the fold of $k_{2n}(x)$ and $x^{-\frac{1}{2}}D_{2m}(2\sqrt{x})$ as a series of terms of type $a_r k_{2(m+n+r)}(x)$. He finally expands $e^x D_{2m+1}(2\sqrt{x})$ and $x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}D_{2m}(2\sqrt{x})$ in series of Laguerre polynomials, derives therefrom two definite integrals involving these functions and Laguerre polynomials and obtains an expansion for the fold of $k_{2n}(x)$ and $x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}$. H. Bateman (Pasadena).

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Fayet, Joseph: Sur la réduction des équations différentielles linéaires et homogènes des équations à coefficients constants. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 650—652 (1937).

L'auteur donne quelques conditions nécessaires et suffisantes pour la possibilité de la réduction nommée dans le titre avec l'aide des transformations $y = \lambda(x)z, \frac{d\xi}{dx} = u(x)$ de la variable indépendante et de la fonction inconnue. L'ordre d'idées est le même que dans les travaux précédents de l'auteur (ce Zbl. 12, 163; 14, 305). Janczewski.

Krein, M.: Sur les opérateurs différentiels oscillatoires. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 4, 395—398 (1937).

Suite des travaux précédents de l'auteur et de M. Gantmacher (ce Zbl. 12, 68, 169; 13, 208; 14, 64). On considère l'opérateur autoadjoint

$$L(y) = (l_0 y^{(n)})^{(n)} + (l_1 y^{(n-1)})^{(n-1)} + \dots + l_n y \quad (l_0 > 0; a \leq x \leq b)$$

Pour étudier les propriétés de cet opérateur il est important de préciser les conditions pour que $L(y)$ soit un opérateur „oscillatoire“ (appelé précédemment par l'auteur — opérateur \mathfrak{R} — voir loc. cit.). Ces conditions nécessaires et suffisantes sont: a) le système différentiel $L(y) = 0$, $y|_{x=a} = \dots = y^{(n-1)}|_{x=a} = 0$ possède des solutions $w_1 \dots w_n$ telles qu'on a $W(w_1 \dots w_s) > 0$ pour $a < x \leq b$ ($s = 1 \dots n$; W — le Wronskien), b) $(-1)^n l_0(x)$ est > 0 . — On obtient alors le théorème suivant, qui généralise pour les opérateurs oscillatoires de l'ordre $2n$ les théorèmes de Sturm-Liouville: Soient $w_1(x, \lambda) \dots w_n(x, \lambda)$ solutions indépendantes du système différentiel $L(y) - \lambda \varrho y = 0$, $y|_{x=a} = \dots = y^{(n-1)}|_{x=a} = 0$, L étant un opérateur oscillatoire et ϱ une fonction continue non négative ($a \leq x \leq b$) ne s'annulant identiquement dans aucun intervalle partiel. Alors pour tout λ fixe l'équation $F_\lambda(x) = W(w_1 \dots w_n) = 0$ n'a pour $a < x \leq b$ que des zéros simples (qui sont des fonctions croissantes de λ). Leur nombre est égal à l'indice de la dernière valeur caractéristique du système: $L(y) - \lambda \varrho y = 0$, $y|_{x=a, b} = \dots = y^{(n-1)}|_{x=a, b} = 0$ qui ne surpasse pas λ . Janczewski (Leningrad).

Leimanis, Eugène: Sur les multiplicités singulières d'un système différentiel réel. Ann. École norm., III. s. 53, 309—327 (1936).

Es wird das folgende System von Differentialgleichungen betrachtet:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}'_{2v-1} &= \alpha_{2v-1} \bar{x}_{2v-1} + \alpha_{2v} \bar{x}_{2v} + \dots \\ \bar{x}'_{2v} &= -\alpha_{2v} \bar{x}_{2v-1} + \alpha_{2v+1} \bar{x}_{2v} + \dots \\ x'_v &= \lambda_v x_v + \dots \\ \bar{y}'_{2v-1} &= \beta_{2v-1} \bar{y}_{2v-1} + \beta_{2v} \bar{y}_{2v} + \dots \\ \bar{y}'_{2v} &= -\beta_{2v} \bar{y}_{2v-1} + \beta_{2v+1} \bar{y}_{2v} + \dots \\ y'_v &= \mu_v y_v + \dots \\ z'_v &= \dots \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (v=1, \dots, r) \\ (v=1, \dots, p) \\ (v=1, \dots, s) \\ (v=1, \dots, n) \\ (v=1, \dots, q) \end{aligned} \quad (1)$$

Dabei sind die α und λ positive, die β und μ negative Konstante und die durch Punkte angedeuteten Teile ganze Funktionen von den $\bar{x}, x, \bar{y}, y, z$, deren Glieder in bezug auf \bar{x}, x, \bar{y}, y in den $2r + p + 2s + n$ ersten Gleichungen mindestens vom Grade 2 und in den letzten q Gleichungen mindestens vom Grade 1 sind. Das System hat dann die Stellen $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \dots = y_n = 0$, z_v beliebig zur singulären Mannigfaltigkeit, und in den Punkten dieser Mannigfaltigkeit hat die charakteristische Gleichung des Systems (1) p positive Lösungen, n negative, $2r$ konjugiert-komplexe mit positivem Realteil, $2s$ konjugiert-komplexe mit negativem Realteil und q Lösungen, die Null sind. Für ein solches System zeigt Verf.: Durch jede Stelle $\bar{x}_1 = \dots = y_n = 0$, z_{10}, \dots, z_{q0} der singulären Mannigfaltigkeit gibt es zwei Charakteristikensysteme von (1). Das erste besitzt eine Darstellung durch $n + 2s + q$ Gleichungen

$$\begin{aligned} y_v &= P_2(x, \bar{x}|z) & (v=1, \dots, n) \\ \bar{y}_v &= P'_2(x, \bar{x}|z) & (v=1, \dots, 2s) \\ z_v &= z_{v0} + P_1(x, \bar{x}|z_0) & (v=1, \dots, q), \end{aligned}$$

wo $x; \bar{x}; z; z_0$ an Stelle von $x_1, \dots, x_p; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2r}; z_1, \dots, z_q; z_{10}, \dots, z_{q0}$ steht und wo P_2, P'_2, P_1 Potenzreihen in x, \bar{x} sind, die mit Gliedern des Grades ≥ 2 bzw. ≥ 1 beginnen und deren Koeffizienten von den z_v bzw. z_{v0} abhängen und nach Einsetzen in die Nenner der $2r + p$ ersten Gleichungen von (1) zu einem Differentialgleichungssystem der Ordnung $2r + p - 1$ führen. Das zweite Charakteristikensystem wird in entsprechender Weise durch Vertauschung von $x, \bar{x}, \alpha, \lambda$ mit y, \bar{y}, β, μ erhalten. — Dieser Satz wird zur Diskussion von Systemen vierter Ordnung angewendet; für die dabei möglichen Fälle werden Beispiele angegeben. Kamke (Tübingen).

Srinivasiengar, C. N.: On the „special integrals“ of partial differential equations of the first order in three variables. Tôhoku Math. J. 42, 284—294 (1936).

Bemerkungen über vollständige und singuläre Integrale bei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Den Ausgangspunkt bildet ein veralteter Standpunkt.

Kamke (Tübingen).

Levi, Beppo: Considerazioni sopra l'economia delle condizioni iniziali nella risoluzione dei sistemi di equazioni alle derivate parziali. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, [X. s. 2, 141—144 (1935).

Einige Bemerkungen über einen Satz von Riquier [Acta math. 25 (1902)], nach welchem bei einem analytischen System partieller Differentialgleichungen die höchste Variablenanzahl der für die Bestimmung einer Lösung im analytischen Gebiet willkürlich vorzuschreibenden Funktionen sowie die Anzahl dieser Funktionen vom System allein abhängt. Das Resultat wird auch folgendermaßen vervollständigt: Bei der Bestimmung der allgemeinen analytischen Lösung durch vorgeschriebene Anfangswerte für die Lösung selbst und deren Ableitungen gewisser, vom System allein abhängenden Ordnungen, die höchste Variablenanzahl μ der so auftretenden willkürlichen Funktionen und für jede Variablenanzahl $\leq \mu$ die höchste Anzahl der willkürlichen Funktionen dieser Variablen sind vom System eindeutig bestimmt. G. Cimmino (Napoli).

Germay, R.-H.-J.: Sur les systèmes semi-linéaires d'équations aux dérivées partielles du second ordre. I. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 5, 215—219 u. 253—258 (1936).

Germay, R.-H.-J.: Dérivées, par rapport à certains paramètres, des intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 6, 2—6 et 40—44 (1937).

Verf. betrachtet ein System partieller halblinearer Differentialgleichungen mit $n + k$ Unbekannten $u_i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $v_j(x, y)$ ($j = 1, \dots, k$) folgender Art:

$$u_{ixy} = \Phi_i, \quad v_{jxy} = Y_j + \sum_{s=1}^k (\Psi_{js} v_s + \Theta_{js} v_{sx} + \Omega_{js} v_{sy}),$$

wobei $\Phi_i, Y_j, \Psi_{js}, \Theta_{js}, \Omega_{js}$ gegebene Funktionen von $x, y, u_i, u_{ix}, u_{iy}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) bedeuten. Für die Φ_i wird die übliche Voraussetzung einer Lipschitzschen Bedingung gemacht; von den übrigen wird jedoch die bloße Stetigkeit verlangt. Durch die Methode der sukzessiven Approximationen wird die Existenz im kleinen einer Lösung mit vorgeschriebenen Werten für $x = x_0$ und $y = y_0$ bewiesen. Wenn man nur die n ersten Gleichungen betrachtet und die Existenz beschränkter, stetiger Ableitungen für die Φ_i voraussetzt, dann konvergieren auch, bei den für die u_i aufgestellten sukzessiven Annäherungen, die Ableitungen nach x für $y = y_0$ (oder nach y für $x = x_0$). Auf Grund des vorigen Resultats über halblineare Systeme schließt Verf., nach einem von Goursat in analogen Fragen angewandten Gedankengange, daß die u_i nach den Parametern x_0, y_0 stetig differenzierbar sind, wobei die Ableitungen nach x_0 oder y_0 Gleichungen desselben Typus befriedigen wie die oben für die v_j geschriebenen.

G. Cimmino (Napoli).

Mangeron, D.: Sur certains problèmes à la frontière polygonale non totalement caractéristique pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 544—547 (1937).

Man sucht nach einer Lösung $u(x, y)$ der Gleichung

$$u_{xxyy} = f(x, y)$$

mit vorgeschriebenen Randwerten im ebenen Viereck $y = 0, y = d, y = mx, x = c$ oder $x = c, y = d, y = m_1 x, y = m_2 x$. Das Problem wird auf die Auflösung einer Integralgleichung von bekanntem Typus zurückgeführt. G. Cimmino (Napoli).

● Nicolesco, Miron: Les fonctions polyharmoniques. (Actualités scient. et industr. Nr. 331. Exposés sur la théorie des fonctions. Publiés par Paul Montel. IV.) Paris: Hermann & Cie. 1936. 54 pag. Frs. 15.—

Vollständiger Bericht über die Theorie der Lösungen von $\Delta^n u = 0$. Fast alle Resultate sind in neueren Arbeiten des Verf. enthalten und wurden in dies. Zbl. bereits referiert, vgl. insbesondere 3, 348; 4, 115; 5, 206; 10, 114; 12, 258; 13, 206. Behandelt werden: Mittelwertsätze, Darstellung durch harmonische Funktionen, Analoga zu Sätzen von Picard, Liouville und Harnack; Randwertaufgaben in Anschluß

an Boggio [Circ. mat. Palermo, Rend. 20 (1905)] und Lauricella [Rend. Lincei, V. s. 16, 17, 18 (1907—1909)]. W. Feller (Stockholm).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Kähler, Erich: Bemerkungen über die Maxwell'schen Gleichungen. Abh. math. Semin. Hansische Univ. 12, 1—28 (1937).

Verf. gibt erstens notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß auf einer dreidimensionalen analytischen Hyperfläche des Raumzeitkontinuums vorgegebene analytische Anfangswerte von einer in der Umgebung der Hyperfläche regulären Lösung $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ des Maxwell'schen Systems

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} i, \\ \operatorname{div} \mathfrak{H} &= 0, & \operatorname{div} \mathfrak{D} &= 4\pi \rho \end{aligned}$$

angenommen werden können. Solche Bedingungen lassen sich so auffassen, daß alle zulässigen Anfangswerte algebraisch mit Hilfe zweier willkürlicher Pfaff'scher Formen bestimmt werden können. Zweitens wird eine der Kirchhoff'schen Lösung der Wellengleichung entsprechende Formel aufgestellt, welche unter gewissen Einschränkungen das Problem löst, die beiden Feldvektoren $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ in einem gegebenen Raumgebiete für jedes t durch die in dem der Lichtausbreitung angemessenen Augenblicke von ihnen angenommenen Randwerte darzustellen. Als wesentliches Hilfsmittel wird dabei die Theorie der Differentialformen benutzt. G. Cimmino (Napoli).

Smirnov, V. I.: La solution d'un problème aux limites pour l'équation des ondes dans le cas du cercle et de la sphère. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 14, 13—16 (1937).

L'auteur étudie l'équation des ondes $a^2 \tilde{\varphi} = \Delta \varphi$. I. Le cas plan. On remarque que si $\varphi[t, M(x, y)]$ est une solution homogène de degré zéro, s'annulant pour $a\tau = t$, alors $\int_0^{t-a\tau} w(\tau) \varphi(t-\tau, M) d\tau$ (w une fonction continue arbitraire) est aussi une solution.

On cherche maintenant pour $r > 1$ une solution, vérifiant les conditions

$$\varphi_m(t, M)|_{t=0} = \frac{\partial \varphi_m(t, M)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \varphi_m(t, M)|_{r=1} = f_m(t) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}$$

sous forme

$$\varphi_m(t, M) = \int_0^{t-a\tau+a} w_m(t) \sqrt{\frac{(t-\tau+a)^2}{a^2 \tau^2} - 1} U_{m-1}\left(\frac{t-\tau+a}{a\tau}\right) d\tau \times \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}$$

$[U_m(x) = \frac{1}{(m+1)^2} T'_{m+1}(x), T_m(x) = \cos(m \arccos x)]$. w est une solution de l'équation de Volterra:

$$\int_0^t w_m(\tau) \frac{T_m\left(\frac{t-\tau+a}{a}\right)}{\sqrt{(t-\tau+a)^2 - a^2}} d\tau = f'_m(t). \quad (m = 0, 1, 2 \dots)$$

On obtient cette dernière fonction dans la forme

$$w_m(\tau) = \int_0^\tau H_m(\tau-s) f'_m(s) ds, \quad H_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{sz} \frac{e^{-s}}{s R_m(s)} ds.$$

$R_m(s)$ est le polynôme $T_m(t)$, où l'on remplace t^P par $(-1)^P K_0^{(P)}(s)$, $K_0^{(P)}$ étant la fonction de Macdonald. — II. Cas de trois dimensions. Le calcul est analogue au cas précédent. La solution „singulière“ est cherchée dans la forme

$$\varphi(t, M) = \int_0^{t-a\tau+a} w_{m,n}(\tau) Q_{n+1}\left(\frac{t-\tau+a}{a\tau}\right) d\tau \times P_n^{(m)}(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}.$$

Elle vérifie la condition $\varphi(t, M)_{r=1} = f_{m,n}(t) P_n^{(m)}(\cos \theta) \left\{ \frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi} \right\}$. w est comme plus haut une solution de l'équation de Volterra avec le noyau $P_n \left(\frac{t - \tau + a}{a} \right)$. [P_n — les polynômes de Legendre, $Q_{n+1}(x) = \int_1^x P_n(x) dx$.] — Le problème pour le domaine intérieur est résolu par un procédé de la même sorte. *Janczewski* (Leningrad).

Smirnov, V. I.: La solution des problèmes aux limites de la théorie de l'élasticité dans le cas d'un cercle et d'une sphère. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 14, 69—72 (1937).

Suite de la note précédente. L'auteur obtient à l'aide de sa méthode — sous forme finie — les solutions des problèmes nommés dans le titre. Considérons par ex. les vibrations de la partie $r > 1$ du plan si les valeurs initiales des composantes u_r, u_θ du déplacement sont nulles et pour $r = 1$ l'on a $u_r = u_m(t) e^{im\theta}$, $u_\theta = v_m(t) e^{im\theta}$. Nous avons alors

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad a^2 \ddot{\varphi} = \Delta \varphi, \quad b^2 \ddot{\psi} = \Delta \psi.$$

Les solutions sont cherchées sous forme

$$\varphi_m = \int_0^{t - ar + a} \Phi_m(t) \sqrt{\frac{(t - \tau + a)^2}{a^2 r^2} - 1} U_{m-1} \left(\frac{t - \tau + a}{ar} \right) d\tau \times e^{im\theta}$$

$$\psi_m = \int_0^{t - br + b} \Psi_m(t) \sqrt{\frac{(t - \tau + b)^2}{b^2 r^2} - 1} U_{m-1} \left(\frac{t - \tau + b}{br} \right) d\tau \times e^{im\theta}.$$

Φ_m et Ψ_m étant les solutions des équations de Volterra d'un type analogue au précédent. Le cas de trois dimensions est étudié de la même manière sous la supposition de la symétrie axiale. *Janczewski* (Leningrad).

Delsarte, J.: Sur un problème de diffraction. Ann. École norm., III. s. 53, 223—273 (1936).

Man sucht nach einer Funktion $u(x, y, z, t)$, welche für jedes $t > 0$ im ganzen Raum x, y, z die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt}/\omega_1^2 &= 0, & \text{für } x > 0, \\ u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt}/\omega_2^2 &= 0, & \text{für } x < 0, \end{aligned}$$

ω_1, ω_2 Konstanten) befriedigt und den Anfangsbedingungen $u(x, y, z, 0) = \alpha(x, y, z)$, $u_t(x, y, z, 0) = \beta(x, y, z)$ genügt. Wird die Existenz einer Lösung $u(x, y, z, t)$ angenommen und setzt man $u(0, y, z, t) = \gamma(y, z, t)$, so läßt sich $u(x, y, z, t)$ mittels bekannter Formeln durch α, β, γ explizit ausdrücken. Von solchen Formeln ausgehend, berechnet Verf. die Grenzwerte von $u_t(x, y, z, t)$ bei Annäherung von links oder rechts an einen Punkt der Ebene $x = 0$; diese Grenzwerte sollen einander gleich sein: so entsteht eine partielle Integro-Differentialgleichung für $\gamma(y, z, t)$. Es folgt die Untersuchung einer Klasse von Linearoperatoren, mit deren Hilfe die gewonnene Integro-Differentialgleichung sich durch eine formale Reihenentwicklung auflösen läßt; nachträglich wird die Gültigkeit dieser Entwicklung festgestellt. Der letzte Teil der Arbeit enthält eine Anwendung auf die Maxwell'schen Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0,$$

wobei ε, μ im Halbraum $x > 0$ oder $x < 0$, konstant sind, für $x = 0$ aber einen Sprung aufweisen. Gegeben sind: Anfangswerte für die beiden letzten Komponenten der Feldvektoren $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ im ganzen Raum und für die Grenzwerte der ersten Komponenten links und rechts der Ebene $x = 0$. Durch ein dem oben geschilderten analogen Verfahren führt man das Problem auf die Auflösung von partiellen Integro-Differentialgleichungen zurück, die sich wieder mit Hilfe der früher erwähnten Linearoperatoren behandeln lassen. *G. Cimmino* (Napoli).

Tonolo, Angelo: Integrazione con quadrature delle equazioni di Dirac. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. s. 15, 221—241 (1936).

Es handelt sich um folgendes, in der Wellenmechanik vorkommendes Diracsches Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -i\varphi_{3t} + i\varphi_{4x} + \varphi_{4y} + i\varphi_{3z} + k\varphi_1 &= 0, \\ -i\varphi_{4t} + i\varphi_{3x} - \varphi_{3y} - i\varphi_{4z} + k\varphi_2 &= 0, & i = \sqrt{-1}, \\ -i\varphi_{1t} - i\varphi_{2x} - \varphi_{2y} - i\varphi_{1z} + k\varphi_3 &= 0, & k \text{ konstant} \\ -i\varphi_{2t} - i\varphi_{1x} + \varphi_{1y} + i\varphi_{2z} + k\varphi_4 &= 0, \end{aligned}$$

Zwei Probleme werden betrachtet: 1. Bestimmung der $\varphi_h(x, y, z, t)$ im ganzen Raum xyz für $t > 0$, bei vorgegebenen Anfangswerten im ganzen Raum; 2. Bestimmung der φ_h im Raumgebiete S für $t > 0$, bei vorgegebenen Anfangswerten in ganz S für $t = 0$ und Randwerten für $t > 0$. Aus dem System folgt, daß die φ_n Lösungen der Gleichung

$$\Delta_2 \varphi - \varphi_{tt} - k^2 \varphi = 0$$

sind. Unter Heranziehung einer bekannten Weberschen Formel für diese Gleichung gibt Verf. einen expliziten Ausdruck für die φ_h in beiden Problemen. *G. Cimmino.*

Théodoresco, N.: La dérivée aréolaire et les potentiels généralisés dans la mécanique des milieux continus. *Bull. Amer. Math. Soc.* 43, 125—132 (1937).

Es wird darauf hingewiesen, daß gewisse Resultate von Evans und Binney (dies. Zbl. 11, 212f. u. 5, 206), insbesondere über den Satz von Morera, auch als Verschärfung von Ergebnissen des Verf. und Moisil angesehen werden können. Anwendung der Theorie der Flächenderivierten auf die Bestimmung der Kräfteverteilung in einem ebenen Kontinuum, dessen Lamésche Ellipse ein Kreis ist; die Differentialgleichungen werden hierbei durch Integralrelationen ersetzt. *W. Feller* (Stockholm).

Reissner, Erich: Bemerkung zur Theorie der Biegung kreisförmiger Platten. *Z. angew. Math. Mech.* 17, 57—58 (1937).

In einer früheren Arbeit [Über die Biegung der Kreisplatte mit exzentrischer Einzellast. *Math. Ann.* 111 (1935); dies. Zbl. 12, 258] hatte Verf. die Aufgabe, die Biegung einer dünnen elastischen, durch eine Einzellast beanspruchten, am Rande beliebig gestützten Kreisplatte zu berechnen, in geschlossener Form gelöst. In der vorliegenden Note wird unter Benutzung eines Resultats von Gerschgorin (*Appl. Math. a. Mech.* 1, 159, Leningrad—Moskau 1933) diese Lösung erweitert auf den Fall, wo die Belastung kreissymmetrisch über eine Kreisfläche mit exzentrisch gelegenen Mittelpunkt verteilt ist. Die erweiterte Lösung wird ebenfalls in geschlossener Form mittels elementarer Funktionen gegeben. *E. Rothe* (Breslau).

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Pérès, Joseph: Sur diverses décompositions d'un noyau de Fredholm. *J. Math. pures appl.*, IX. s. 16, 1—14 (1937).

The author states that the first part of this paper was written in 1913. It concerns the relation between the number of fundamental solutions of a kernel $K(x, y)$ obtained by composition of p kernels $K_1(x, y), \dots, K_p(x, y)$ in the sense

$$I - K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & -K_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & -K_2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & -K_p \end{pmatrix}$$

where $\int_a^b K_1 K_2 = \int_a^b K_1(x, s) K_2(s, y) ds$ and shows that if n_i is the number of character-

istic solutions corresponding to K_i and n to K then $n_i \leq n$, $i = 1 \dots p$, and $n \leq n_1 + \dots + n_p$ and these are the best inequalities obtainable in the sense that for a given K decompositions satisfying only these relations are possible. In the case where the K_i are orthogonal or permutable $n = n_1 + \dots + n_p$. In the second part of the paper the canonical decomposition of a kernel via the chain method, i.e. determination of sets of functions satisfying $u_0 - \int K u_0 = 0$, $u_1 - \int K u_1 = u_0$ etc

and similarly for the transposed equation, following the usual lines of matrix theory in the finite case, is carried through in detail. *T. H. Hildebrandt* (Ann Arbor).

Feldheim, Ervin: Sur une équation intégrale singulière. *Bull. Sci. math.*, II. s. **61**, 10—18 (1937).

Die Gleichung

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x y} f(y) dy \quad \text{hat} \quad f(x) = e^{-\pi x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{4k} H_{4k}(x \sqrt{2\pi})$$

zur Lösung, wobei $H_n(x)$ das n -te Hermitesche Polynom und λ_k eine willkürliche Konstante bezeichnet. [Nach P. Lévy ist auch $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ eine Lösung, wenn $\varphi(x)$ eine beliebige gerade, quadratintegrierbare Funktion und $\psi(x)$ ihre Fouriertransformierte mit der aus der Gleichung folgenden Normierung ist.] *W. Feller*.

Michlin, S.: Équations intégrales singulières à deux variables indépendantes. *Rec. math. Moscou*, N. s. **1**, 535—551 u. franz. Zusammenfassung 551—552 (1936) [Russisch].

The author considers the integral equation

$$L(W) \equiv a_0(P) W(P) + \int \int f_0(P, \psi) R^{-2} W(Q) dS_Q + \int \int K(P, Q) W(Q) dS_Q = F(P)$$

where the integration is extended over the entire Q -plane, R and ψ are polar coordinates of Q relative to P , and the first integral is taken in Cauchy sense (the second being absolutely convergent). By extending and making more precise some previous work of Tricomi [*Math. Z.* **27**, 87—133 (1927)] the author shows how the problem can be reduced to a non-singular Fredholm equation. *J. D. Tamarkin* (Providence).

Gunther, N.: Sur les noyaux du type Fourier. *C. R. Acad. Sci.*, Paris **204**, 737—739 (1937).

Die einfachsten Sätze über den Zusammenhang von Funktion, Transformierten und Eigenfunktionen werden angegeben für den Fall, daß der Kern eine additive Mengenfunktion in der vom Verf. bevorzugten Schreibweise ist; vgl. dies. Zbl. **13**, 24. *W. Feller* (Stockholm).

Macphail, M. S., and E. C. Titchmarsh: The summability of Fourier's integral. *J. London Math. Soc.* **11**, 313—318 (1936).

Let $f(t)$ be integrable over every finite interval and continuous at $t = x$. The authors consider the Fourier integral $\pi^{-1} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(x - t) dt$ and state the result that if the t -integral is uniformly $(C \cdot k)$ summable then the u -integral is $(C \cdot k + 1)$ summable to $f(x)$. A proof of this statement is given in the cases $k = 0, 1$, when it is also shown that $(k + 1)$ can not be replaced by $k + 1 - \delta, \delta > 0$. *J. D. Tamarkin*.

Germa, R.-H.-J.: Remarques sur la théorie des équations intégrales différentielles linéaires. I. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **6**, 7—11 u. 45—48 (1937).

Einfache Bemerkungen über das System linearer partieller Integro-Differentialgleichungen

$$y'_i(x) = \sum_{j=1}^p \left[a_{ij}(x) y_j(x) + \int_{x_0}^x \{ b_{ij}(x, s) y_j(s) + c_{ij}(x, s) y'_j(s) \} ds \right] + g_i(x) \\ (i = 1, 2, \dots, p)$$

mit vorgegebenen Anfangswerten für die $y_i(x)$. Verf. scheint doch nicht bemerkt zu haben, daß ein solches System, wenn man die $y'_i(x)$ als Unbekannte nimmt, sich als ein System gewöhnlicher Volterrascher Integralgleichungen schreiben läßt.

G. Cimmino (Napoli).

Funktionalanalysis, Funktionalräume:

Saks, S.: On some functionals. II. *Trans. Amer. Math. Soc.* **41**, 160—170 (1937).

This article contains corrections to a former paper of the author: *Trans. Amer. Math. Soc.* **35**; this Zbl. **6**, 402. Some new theorems are added, from which we mention the following one: E may be a metric, complete and linear space, S the space of all

measurable and finite functions defined on a measurable set I of finite measure. The distance $d(\xi, \eta)$ of two functions $\xi(t), \eta(t) \in S$ is defined by

$$d(\xi, \eta) = \int_I \frac{|\xi(t) - \eta(t)|}{1 + |\xi(t) - \eta(t)|} dt,$$

then S is also metric, complete and linear. On E a sequence of linear operations $\{\xi_n(x; t)\}$ may be considered; for fixed n and fixed $x \in E$ $\xi_n(x; t)$ is an element of the space S . Then there exists a measurable subset B of I such that: 1. for all $x \in E$ the sequence $\{\xi_n(x; t)\}$ converges in measure on B (i.e., to every $\eta > 0$ there corresponds a $k_x = k_x(\eta)$ such that measure $K[t \in I; |\xi_n(x; t) - \xi_m(x; t)| > \eta] < \eta$ whenever $n > k_x, m > k_x$), 2. for every $x \in E$, except perhaps for a set of the first category in E the sequence $\{\xi_n(x; t)\}$ converges in measure on no set in $I - B$ of positive measure.

J. Ridder (Groningen).

Lengyel, B. A., and M. H. Stone: Elementary proof of the spectral theorem. *Ann. of Math.*, II. s. 37, 853—864 (1936).

Die Verff. geben für die Existenz der Spektralzerlegung Hermitescher Operatoren eine Beweisanordnung, die sie, im Gegensatz zu den üblichen Behandlungsweisen, als elementar bezeichnen, da die üblicherweise herangezogenen Konvergenzsätze über Funktionenfolgen durch die entsprechenden Eigenschaften des Hilbertschen Raumes ersetzt werden.

Wintner (Baltimore).

Clarkson, J. A.: The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue spaces. *Ann. of Math.*, II. s. 38, 114—115 (1937).

Nach v. Neumann und Jordan (dies. Zbl. 12, 307) gibt es für jeden Banachschen Raum eine zwischen 1 und 2 gelegene Konstante C so, daß

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)} \leq C.$$

Die kleinste (also eindeutig bestimmte) Konstante C dieser Art wird hier für die Räume l_p, L_p ($1 \leq p \leq \infty$) ausgerechnet.

Schauder (Lwów).

Fichtenholz, Gr.: Contribution à la théorie des fonctionnelles linéaires. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 4, 255—258 (1936).

Verf. hat in einer früheren Note (dies. Zbl. 15, 306) verschiedene Konvergenzarten in einem linearen Raume E untersucht. Eine Konvergenzart α ist dann und nur dann normal, d. h. es gibt dann und nur dann eine äquivalente Normierung in E , wenn sich eine solche Gesamtheit $\hat{F} = \{\hat{f}\}$ von den durch α bestimmten linearen Funktionalen $\hat{f}(x)$ wählen läßt, daß folgende Bedingungen erfüllt sind: a) für jedes $x \in E$ ist die Zahlenmenge $\hat{f}(x)$ beschränkt, b) aus $x_n \xrightarrow{\alpha} 0$ folgt gleichmäßig $\hat{f}(x_n) \rightarrow 0$ und umgekehrt. Notwendige Bedingungen für die Normalität bekommt man dann, wenn sich die Gesamtheit F_α aller durch α bestimmten Funktionalen in entsprechender Weise normieren läßt. Weiter wird die Frage erörtert, wann die durch eine gegebene Gesamtheit F von linearen Funktionalen bestimmte Konvergenzart β (d. h. die umfassendste Konvergenzart, nach welcher alle $f \in F$ stetig sind) normal ist; auch hierfür werden notwendige und hinreichende Bedingungen aufgestellt. Daraus folgt, daß gewisse Konvergenzarten in einigen Räumen nicht normal sind.

Schauder.

Schauder, J.: Einige Anwendungen der Topologie der Funktionalräume. *Rec. math. Moscou*, N. s. 1, 747—753 (1936).

L'aut. expose d'abord les principaux résultats qu'il a obtenus, en collaboration avec J. Leray (ce Zbl. 7, 165 et 9, 73), en étendant à certaines transformations fonctionnelles la notion de degré topologique d'une transformation en un point. Ensuite il expose quelques applications dues soit à lui-même (ce Zbl. 4, 350; 8, 255; 10, 355), soit à J. Leray (ce Zbl. 6, 167; 10, 299; 12, 39), soit à J. Leray et A. Weinstein (ce Zbl. 9, 20). A la fin, l'aut. indique, en mentionnant une lettre de J. Leray, que d'autres invariants topologiques, notamment les nombres de Betti, peuvent aussi

stre généralisés pour l'espace à une infinité de dimensions, mais cette généralisation n'a, jusqu'alors, reçu aucune application. *Georges Giraud* (Bonny-sur-Loire).

Krein, M.: Sur quelques questions de la géométrie des ensembles convexes situés dans un espace linéaire normé et complet. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 14, 5—7 (1937).

Es sei E ein Raum vom Typus (B). Eine in E gelegene Kurve $L: x = x(t)$ ($a \leq t \leq b$) wird schwachstetig genannt, wenn aus $t_n \rightarrow t$ die schwache Konvergenz $x(t_n) \rightarrow x(t)$ folgt. Ist $f(y)$ ein lineares Funktional über E , $\sigma(t)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung ($a \leq t \leq b$), so gibt es — falls L schwachstetig ist — ein

Element y mit (1) $f(y) = \int_a^b f[x(t)] d\sigma(t)$ für alle f . Die Menge derjenigen y , die (1)

erfüllen und den monoton nicht abnehmenden $\sigma(t)$ entsprechen [$\sigma(b) - \sigma(a) = 1$], stimmt mit der kleinsten konvexen abgeschlossenen Menge K überein, die L enthält. K ist auch schwachkompakt. Ist in E die Einheitskugel nicht schwachkompakt, so besitzt K nur Randpunkte. Ist G eine separable, schwachkompakte und schwach abgeschlossene Menge aus E , so besitzt die kleinste konvexe abgeschlossene Menge K über G dieselben Eigenschaften. Dies wird dazu benutzt, um den Fixpunktsatz in Funktionalräumen zu verschärfen. *Schauder* (Lwów).

Variationsrechnung:

Menger, Karl: Nouvelle démonstration de l'équation d'Euler-Lagrange. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 948—951 (1937).

L'Auteur indique brièvement et sans entrer dans les détails une méthode géométrique pour établir les équations d'Euler-Lagrange pour les courbes extrémantes du calcul des variations, dans l'hypothèse que l'extrémante en question soit de classe 2. Cette méthode est fondée essentiellement sur la détermination de la ligne brisée formée par deux cotés égaux qui joint deux points donnés et qui rend minimum (maximum) une expression opportunément approximée du fonctionnel que l'on étudie. — Une modification de la méthode même est ensuite obtenue en substituant à la ligne brisée un arc de circonférence. *Basilio Manià* (Pisa).

Kimball, W. S.: New basic critical equations and methods in the calculus of variations. Philos. Mag., VII. s. 23, 114—153 (1937).

The author obtains the usual first order conditions for an extremum of a definite integral by the often used method of setting up an approximating sum and then obtaining the difference equations which are the first order conditions for an extremum of this sum. The method is not completely justified in this paper, as the author remarks on pp. 140—141. *Graves* (Chicago).

McShane, E. J.: Semi-continuity of integrals in the calculus of variations. Duke Math. J. 2, 597—616 (1936).

The author derives a very general theorem on the semi-continuity of calculus of variations integrals, and from it he proceeds to deduce various specializations which are sufficient for use in proving most of the existence theorems for an extremum now in the literature. These theorems on semi-continuity are applicable to Lagrange problems in parametric or in ordinary form, as well as to problems without side conditions. The classes of curves admitted have uniformly bounded lengths, but the author points out in a footnote (p. 598) that this restriction can be removed in the various special cases by certain slight strengthenings of the hypotheses. The general theorem, in which the integrand $f(x, r)$ is supposed to be defined and lower semi-continuous for a certain set R of points x and directions r , is proved by approximating to $f(x, r)$ by functions $g(x, r)$ defined and continuous throughout the (x, r) space, and differentiable and convex as functions of r . Three interesting examples are given in which the integral fails to be lower semi-continuous, as indications of the necessity of certain hypotheses. In conclusion the author proves an existence theorem, and applies it to the Zermelo navigation problem, to a light transmission problem in which the integrand is dis-

continuous and to a Lagrange problem in which the differential equations are linear in the derivatives. *Graves* (Chicago).

Hu, Kuen-Sen: A problem with variable end points in the calculus of variations. *J. Chin. Math. Soc.* **1**, 1—14 (1936).

x_1 This paper is concerned with conditions under which a minimum of the integral $\int f(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$, with endpoints variable on p - and q -dimensional manifolds, is furnished by an arc g of which one endpoint is conjugate to the other or is a focal point of the end-manifold of the other, but which does not contain any other conjugate or focal points. The method is an extension of that used by Hahn for the case $n = 2$ [*Math. Ann.* **70**, 110—142 (1911)] and which goes back to Schaeffer. It is proved that, under suitable hypotheses on the integrand and on the end manifold, an arc g which satisfies the strengthened Legendre and Weierstrass conditions and which is cut transversally by the end manifolds furnishes a strong proper minimum if and only if a certain function W of n variables has a minimum for zero values of the variables. It is indicated how the terms of successive orders in the expansion of W can be obtained from the complete solution of the Jacobi differential equations. This approach makes possible an extension of the result obtained by Schoenberg in *Ann. of Math.* **32**, 765 (1931) (this *Zbl.* **3**, 10). The problem of this paper is dealt with by Morse (*Calculus of Variations in the Large*, p. 64—70; this *Zbl.* **11**, 28). The advantage of the present treatment is that its conclusions are obtained in terms of conditions on a function of n variables, while Morse's treatment makes them depend on a quadratic form in $n + p + q$ variables; against this must be set the disadvantage that the results lend themselves less readily to geometrical interpretation than do those of Morse. *Arnold Dresden* (Swarthmore).

Funktionentheorie:

Catalano, Giosuè: Sul luogo dei punti regolari di una funzione analitica tali che corrispondenti cerchi di convergenza contengano un punto assegnato. *Atti Accad. Gioenia Catania*, VI. s. **1**, mem. **7**, 1—5 (1936).

Let $f(z)$ be a function of the complex variable z , analytic and single-valued in the neighborhood of the regular point ρ . A construction is given for the locus Γ of a regular point α such that the circle of convergence of $f(z)$ about α shall contain ρ . If Z is a matrix with complex elements and distinct characteristic roots $\varrho_1, \dots, \varrho_r$, then $f(Z)$ converges in (and only in) the intersection of the regions $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ determined by $\varrho_1, \dots, \varrho_r$, resp.

MacDuffee (Madison).

Kawata, Tatsuo: On analytic functions regular in the half-plane. *Proc. Imp. Acad. Jap.* **12**, 147—148 (1936).

Statement (without proof) of an extension to the case $p > 0$ of a result obtained by Hille and Tamarkin for $p \geq 1$ (this *Zbl.* **12**, 255). *J. D. Tamarkin*.

Ahlfors, Lars V.: On Phragmén-Lindelöf's principle. *Trans. Amer. Math. Soc.* **41**, 1—8 (1937).

Vorausgesetzt, daß $f(z)$ im Streifen $|y| \leq \frac{\pi}{2}$ ($z = x + iy$) regulär und nicht beschränkt ist und daß die Beziehungen $|f(z)| \leq 1$ für $|y| = \frac{\pi}{2}$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} |f(z)| \leq 1$ bestehen, so gilt nach dem Phragmén-Lindelöfschen Satz, daß das Integral

$$\mu(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log |f(x + iy)| \cos y \, dy \quad \text{für } x \rightarrow \infty \text{ unbeschränkt wächst, so daß}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \mu(x) e^{-x} > 0$. Hierzu wird eine interessante Verschärfung gegeben. Verf. befreit sich von der Annahme der Beschränktheit von f im Randpunkte $x = -\infty$ und betrachtet ein beliebiges derjenigen zusammenhängenden Gebiete Ω , wo $|f| > 1$. Durch

ine einfache, elegante Betrachtung wird gezeigt, daß derjenige Teil $m(x)$ von $\mu(x)$, der dem in Ω fallenden Teil des Integrationsintervalls $|y| \leq \frac{\pi}{2}$ entspricht, der Differentialungleichung $m''(x) \geq m(x)$ genügt. Hieraus folgt für $x_1 < x < x_2$ die Beziehung

$$\begin{vmatrix} m(x) & e^x & e^{-x} \\ m(x_1) & e^{x_1} & e^{-x_1} \\ m(x_2) & e^{x_2} & e^{-x_2} \end{vmatrix} \geq 0,$$

welche auf die Existenz der Grenzwerte $m(x)e^{-|x|}$ für $x = \pm\infty$ schließen läßt. Es gilt ferner, daß mindestens der eine Grenzwert positiv ist. Hieraus folgt speziell der Phragmén-Lindelöfsche Satz. — Zum Schluß wird das Resultat auf die Halbebene $y > 0$ transformiert und auf harmonische Funktionen von n Variablen erweitert.

Rolf Nevanlinna (Göttingen).

Lipka, Stephan: Über den Zusammenhang zweier Sätze der Funktionentheorie. Acta Litt. Sci. Szeged 8, 160—165 (1937).

L'A. démontre quelques théorèmes qu'il considère comme reliant le théorème de Jentzsch à celui de Hurwitz. Le théorème suivant en est un exemple: Posons $f(x) = \sum a_k x^k$, avec le rayon de convergence égal à un. Supposons que f est régulière au point un et que $f(1) = 0$. Posons $f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Pour $n > N(\delta)$ toutes les fonctions $f_n(x)$ possèdent un zéro dans le cercle $|x - 1| < \delta$.

Mandelbrojt.

Edrei, Albert: Sur certains invariants-limites des séries entières. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 1488—1491 (1936).

Let $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^{-v-1}$ be regular for $|z| > R$, $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$. Pólya investigated the determinants $A_k^{(n)} = |a_{k+\alpha+\beta}|$ ($\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n-1$), in particular for $k=0$ and $n \rightarrow \infty$ [Math. Ann. 99, 687 (1928)]. Let $\{\varphi_n\}$ be a positive sequence satisfying the conditions $\varphi_n > n^2$, $\varphi_{n+1}/\varphi_n \rightarrow 1$. The author shows that the expression $\limsup_{n \rightarrow \infty} |A_k^{(n)}|^{1/\varphi_n} = \tau_k$ is independent of k .

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Biggeri, Carlos: Sur les singularités des fonctions analytiques définies par des séries potentielles. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 30—32 (1937).

The author indicates generalizations of theorems due to Dienes and Fekete. In the Dirichlet series $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ let $\Re(a_n) \geq 0$ and $\lim[\cos \arg a_n]^{1/n} = 1$, further let $\sigma_0 = \sigma_a$. Then $s = \sigma_0$ is a singular point of the function defined by the series. The case $\lambda_n = n$ is discussed in some detail, the proof being based upon a well known criterion of Ostrowski.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Carmichael, R. D., W. T. Martin and M. T. Bird: On a classification of integral functions by means of certain invariant point properties. Trans. Amer. Math. Soc. 40, 462—473 (1936).

A sequence of positive numbers $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ is said to be an A sequence if $t_n^{1/n} \rightarrow \infty$ and if for every analytic single-valued function $F(x)$ and for every two finite regular points x_0, x_1 of $F(x)$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |t_n F^{(n)}(x_0)/n!|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |t_n F^{(n)}(x_1)/n!|^{1/n}$.

It is proved that a necessary and sufficient condition that $\{t_n\}$ be an A sequence is given by $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=0}^{\infty} (t_v/t_v + n) a^v \right)^{1/n} = 1$ for all $a > 0$. On the basis of this notion, and

of another notion, that of a B sequences, a certain classification of entire transcendental functions is introduced.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Ganapathy Iyer, V.: On the Lebesgue class of integral functions along straight lines issuing from the origin. Quart. J. Math., Oxford Ser. 7, 294—299 (1936).

The following notations are used. A denotes an angle, that is an infinite region, in the $z = x + iy$ plane, bounded by two half-lines issuing from the origin. $f(z)$ denotes

a function which is analytic in the interior and on the sides of the angle \mathcal{A} , and $M(r, \mathcal{A}, f)$ denotes the maximum of $|f(z)|$ in the sector cut out by \mathcal{A} on the circular region $|z| \leq r$. The condition

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r, \mathcal{A}, f)}{r^{1/\alpha}} \leq 0,$$

where α is the radian measure of the angle \mathcal{A} , will be referred to as condition (C). Let $z = re^{i\theta}$, $0 < r < \infty$, be a half-line comprised in \mathcal{A} . If, for a $p > 0$, the integral

$\int_0^\infty |f(te^{i\theta})| dt$ exists, then $f(z)$ is said to belong to the class L_p on the half-line. The

author proves a series of theorems concerned with integrals of the above type. To illustrate, we quote the following result. Theorem: Let $f(z)$ be analytic in an angle \mathcal{A} of magnitude α . Let it satisfy condition (C) in \mathcal{A} . Let $f(z)$ belong to the class L_p , $p > 0$, along the sides of \mathcal{A} . Then $f(z)$ belongs to L_p uniformly along every half-line in \mathcal{A} . A number of further results are deduced from this theorem. For instance: If an integral function of order one and of minimal type belongs to L_p along a whole line, then it is identically zero. The proofs involve the use of subharmonic functions. *Tibor Radó.*

Obrechhoff, Nikola: Sur les fonctions méromorphes limites de fonctions rationnelles. *Math. Z.* 42, 203—220 (1937).

In a previous paper (this Zbl. 9, 262) the author has considered meromorphic functions with simple poles as limits of rational functions. This work is now extended to functions with multiple poles of bounded order. — Let $P_n(z)$ be polynomials of degree $\leq q$, and let the sequence

$$R_n(z) = P_n(z) + \sum_{\nu=1}^n \left[\frac{A_{n\nu}^{(\lambda)}}{(z - \alpha_{n\nu})^\lambda} + \dots + \frac{A_{n\nu}^{(1)}}{z - \alpha_{n\nu}} \right]$$

converge uniformly to a meromorphic function $R(z)$ regular at $z = 0$. Suppose further that for some $k \geq 0$

$$\sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\nu=1}^n |\alpha_{n\nu}^{-k-s} A_{n\nu}^{(s)}| < M. \quad (*)$$

Then

$$R(z) = P(z) + \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(s)} \left[\frac{1}{(z - \alpha_n)^s} + (-1)^{s-1} \sum_{g=0}^{m-1} \binom{s-1+g}{g} \alpha_n^{-s-g} z^g \right],$$

$P(z)$ polynomial of degree $\max(q, [k])$ and $m = k$ or $[k] + 1$ according as k is an integer or not. The converse is also true. — Further the author shows that if the arguments of the coefficients of a convergent sequence of rational functions are suitably limited, then the coefficients of the meromorphic limit function are limited in the same manner, and satisfy in addition a convergence condition of type (*). *E. Hille.*

Dinghas, Alexandre: Sur une généralisation du théorème de Denjoy-Carleman-Ahlfors. *Bull. Soc. Math. France* 64, 216—219 (1936).

Fortsetzung früherer Untersuchungen des Verf. über die Carlemansche Differentialungleichung (dies. Zbl. 15, 70). Vorausgesetzt, daß $f(z)$ in einem Gebiet, das den Punkt $z = \infty$ als Randpunkt hat, regulär ist und auf dem Rande von niedrigerer Wachstumsordnung ist als im Innern des Gebietes, so gilt eine einfache Beziehung zwischen der Wachstumsordnung im Innern und der mittleren Länge derjenigen Bogen des Kreises $|z| = r$, welche im Gebiete liegen. Der Beweis setzt voraus, daß das Anwachsen der Funktion gewissen Regularitätsbedingungen genügt. *Rolf Nevanlinna* (Göttingen).

Ullrich, Egon: Flächenbau- und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 46, 232—274 (1936).

Verf. macht den Versuch, einige allgemeine Gesichtspunkte in der Wertverteilungslehre durch vollständige Behandlung einer besonderen Aufgabe zu beleuchten. Dafür eignet sich besonders gut der Denjoy-Carleman-Ahlfors'sche Satz und die damit zusammenhängenden Fragen. Der Leser wird zunächst in die verschiedenen Beweismethoden für diesen Satz eingeführt; von den vier Beweisen, nach Ahlfors.

Grötzsch-MacIntyre, Beurling und Carleman, wird hier der zweite fast vollständig dargestellt. Es wird dann auf die Wichtigkeit der geometrischen Betrachtungsweise hingewiesen: Zählt man nicht die asymptotischen Werte, sondern die unmittelbaren Randstellen der Riemannschen Fläche (direkt kritische Stellen), so erhält man, wie der Ref. zuerst zeigte, einen allgemeineren Satz, der auch für gebrochene Funktionen gilt. Ein wichtiger Zusatz für Funktionen von der Ordnung $< \frac{1}{2}$ ist neu. Besondere Beachtung verdient die vom Verf. geschaffene deutsche Terminologie, die durchweg einfach und zutreffend ist.

Ahlfors (Cambridge, Mass.).

Peschl, E.: Zur Theorie der schlichten Funktionen. J. reine angew. Math. **176**, 61—94 (1936).

The author starts with the important investigations of Löwner [Math. Ann. **89**, 103 (1923)] and modifies and generalizes them in various details. The basic idea is the "iteration" of the elementary representations which map the unit circle cut along a rectilinear orthogonal segment onto the unit circle; by proper iterations an arbitrary univalent representation

$$f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$$

can be approximated. This remark leads first of all to a very simple proof of the known inequalities $|c_2| \leq 2$, $|c_3 - c_2^2| \leq 1$. The efforts of the author are concentrated however chiefly upon the problem of characterizing the domain B_n of the coefficients (c_2, c_3, \dots, c_n) . The corresponding domain B_n^* of star-shaped representations can be considered as known in principle. According to the main theorem B_n is the least domain containing B_n^* and possessing a certain boundary property. This property is, however, too abstruse to be formulated in a short review. More concrete results can be obtained in the case of real a_n , for star-shaped functions, and for the special cases $n = 2, 3$, i.e. in the cases hitherto investigated. For instance, a complete characterization of the real domain (c_2, c_3) is given in the form of a comparatively simple parametric representation. From here a result of Fekete and Szegő [J. London Math. Soc. **8**, 85 (1933); this Zbl. **6**, 353] is derived in a new way. Finally, a generalization of Löwner's partial differential equation (for a cut having the form of a "topological tree") may be mentioned. — Correction in the list of papers: Little = Littlewood.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Vignaux, J. C.: Über einfache und mehrfache konvergente Reihen von Funktionen einer dualen komplexen Variablen. An. Soc. Ci. Argent. **122**, 3—45 (1936) [Spanisch].

L'A. continue ses recherches, commencées dans un Mémoire antérieur (ce Zbl. **14**, 167, 168), et portant sur les fonctions d'une variable complexe duale (séries de Taylor et de Dirichlet d'une telle variable etc.). (Cf. ce Zbl. **15**, 301.) Mandelbrojt.

Vignaux, J. C.: Verallgemeinerung einer Formel von Schwarz. An. Soc. Ci. Argent. **123**, 33—35 (1937) [Spanisch].

L'A. généralise aux fonctions de deux variables la formule de Schwarz:

$$f''(a) = \frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} R(\theta) e^{-i\theta} d\theta \quad (\text{l'A. a écrit } 2\pi R \text{ au lieu de } \pi R). \quad \text{Mandelbrojt.}$$

Numerische und graphische Methoden.

Nogrady, H. A.: A new method for the solution of cubic equations. Amer. Math. Monthly **44**, 36—38 (1937).

Die kubische Gleichung wird zunächst in eine reduzierte und diese durch eine geeignete Streckung in eine Gleichung $z^3 + nz + n = 0$ übergeführt. Die Abhängigkeit zwischen z und n kann nun graphisch oder tabellarisch dargestellt werden. Diskussion der Ergebnisse. — Das Verfahren ist jedoch nicht neu, wie aus der Bemerkung über die Gleichung $x^n + cx + c = 0$ in der Enzyklopädie der math. Wiss. **1**, 005, 349) hervorgeht.

L. Schruka (Wien).

Shain, Julius: The method of cascades. Amer. Math. Monthly 44, 24—29 (1937).

Die Methode des Kaskaden stammt von Michel Rolle. Sie hat historisch eine große Bedeutung für die Infinitesimalrechnung und die Lehre von den Gleichungen auch der heute nach Rolle benannte Satz hat hier seinen Ursprung. — Die Methode der Kaskaden verfährt so, daß zunächst durch eine Transformation die Vorzeichen der Gleichungskoeffizienten abwechselnd gemacht werden; hierzu dient $x = h - y$ wo $h = a/c + 1$ eine obere Schranke für die Gleichungswurzeln ist (a größter Absolutwert der negativen Koeffizienten, c erster Koeffizient). Die neue Gleichung hat dann keine negativen Wurzeln. Von dieser werden nun die Kaskaden, in unserer jetzigen Ausdrucksweise die Ableitungen, gebildet. Von den Wurzeln einer solchen Kaskade ausgehend erhält man die der vorhergehenden durch systematische Bildung von arithmetischen Mitteln. — Es folgen noch einige historische Bemerkungen. *L. Schrutka.*

Ikeda, Yosirô: On practical methods of conformal representation. Mem. Fac. Engng. Hokkaido Imp. Univ. 4, 1—4 (1936).

Durch Multiplikation, Addition, Einsetzung und Umkehrung kann man aus bekannten konform abbildenden Funktionen neue gewinnen. Die genannten Operationen werden geometrisch gedeutet. Praktische Anwendung dieser Ausdeutungen wird für spätere Artikel angekündigt. Als Ausgangsfunktionen sollen dann die elementaren Funktionen $\log z$, $1/z$ und $\arccos z$ und die elliptischen Funktionen $F(z, k)$ und $E(z, k)$ dienen. *Theodor Zech (Darmstadt).*

Mikeladze, Sch.: Über die numerische Lösung der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \varphi(x, y, z)$. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 14, 177—179 (1937).

Für die Werte einer Funktion $u(x, y, z)$ in den Punkten eines Würfelgitters werden Beziehungen angegeben: Eine lineare Kombination von u -Werten in Gitterpunkten ist nahezu gleich einem symbolischen Polynom in Δu ($\Delta^s u = \Delta \Delta^{s-1} u$), genommen für einen der Gitterpunkte. Der Fehler ist von 6. oder 8. Ordnung in der Maschenweite h . Die Formeln entstehen durch lineare Kombination von Taylorentwicklungen. Bei Vernachlässigung des Fehlers können sie zu näherungsweise Auflösung von $\Delta u = \varphi(x, y, z)$ dienen. Für gewisse Fälle werden Fehlerschätzungen derartiger gewonnener Näherungslösungen gegeben. Das Verfahren wurde vom Verf. schon früher bei zwei unabhängigen Veränderlichen angewandt (vgl. dies. Zbl. 10, 399). *Zech.*

Mikeladze, Sch.: Über numerische Integration der Laplaceschen und Poissonschen Gleichungen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 14, 181—182 (1937).

Vgl. das vorst. Ref. Zwei statt drei unabhängige Veränderliche. *Theodor Zech.*

Romberg, W.: Ein Verfahren zur gleichzeitigen approximativen Bestimmung von Eigenwert und Eigenfunktion. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 14, 65—68 (1937).

Für ein Eigenwertproblem $h(\varphi) - e\chi(q_i)\varphi = 0$ mit sich selbst adjungiertem Operator $h(\varphi)$ und mit nur positiven Eigenwerten denkt man sich bei den beiden Variationsproblemen

$$e(f, f) = \frac{\int f h(f) d\tau}{\int f \cdot \chi \cdot f d\tau} = \min_{d\tau = \prod_i dq_i} \eta(g, g) = \frac{\int \left[\frac{h(g)}{\chi} \right]^2 \chi d\tau}{\int g^2 \chi d\tau} = \min$$

nach der Art von Ritz' Näherungslösungen ermittelt. Das erste ist im wesentlichen identisch mit dem Ritzschen Verfahren für den kleinsten Eigenwert e^0 , und das zweite liefert Näherungslösungen φ_N bzw. Näherungswerte η_N , für die $\lim_{N \rightarrow \infty} (\varphi_N, \varphi_N) = (e^0)^2$.

Der Fall, wo nicht alle Eigenwerte positiv sind, wohl aber eine untere Schranke für die Eigenwerte bekannt ist, wird auf den vorigen Fall zurückgeführt. *Funk (Prag)*

Ehrenberg, Wolfgang: Die „Scheibenwaage“. Ein neues Hilfsmittel zur raschen Addition gerichteter Größen und deren Vielfachen zum Zwecke der Auswertung periodischer Kurven von beliebiger Form. Z. Instrumentenkde 57, 77—79 (1937).

Die Scheibenwaage dient zur Addition zweidimensionaler Vektoren. Sie besteht

aus einer Scheibe, die in einem Punkt drehbar aufgehängt ist. Gewichtstücke geben auf dieser die Vektoren durch Lage und Gewicht wieder. Mittels eines Gegengewichtes wird die Summe gefunden. Der Verf. wendet die Scheibenwaage zur Untersuchung von Körperfarben an. Farbton und Farbstärke eines Körpers gehen aus seinem (periodischen) Remissionsspektrum als Phase und Amplitude der Grundwelle hervor. Beide werden bekanntlich durch die Lage des Schwerpunktes eines entsprechend dem Spektrum abgeschnittenen Zylindermantels gegeben. Der Verf. findet diesen Schwerpunkt mittels der Scheibenwaage und empfiehlt sein Verfahren auch für die statistische Bearbeitung annähernd periodischer Vorgänge. *Theodor Zech* (Darmstadt).

Pasternack, Simon: On the mean value of r for Keplerian systems. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **23**, 91—94 (1937).

The author notes that expressions for the mean value of r^s for Keplerian systems have been given by Waller and Van Vleck. He shows that this mean value can be expressed in terms of a generalized hypergeometric series of the type ${}_3F_2$, and uses transformations of such series to obtain formulae which are more useful for computation.

W. N. Bailey (Manchester).

Calichipulo, Antonio: Méthode de sélection des erreurs d'observation. *C. R. Acad. Sci., Paris* **204**, 642—644 (1937).

Geometrie.

Ott, E. R.: Finite projective geometries, $PG(k, p^n)$. *Amer. Math. Monthly* **44**, 86—92 (1937).

Im Anschluß an die analytische und synthetische Konstruktion endlicher Geometrien von Veblen und Bussey untersucht Verf. den Fall der zweidimensionalen endlichen projektiven Geometrien genauer, da der zweidimensionale Fall eine Sonderstelle einnimmt. Die synthetische Definition einer solchen Geometrie verlangt die Existenz von endlich vielen Punkten und Geraden, die alle in derselben Ebene liegen sind, je zwei Punkte haben genau eine Verbindungsgerade, auf jeder Geraden liegen $\lambda = p^n + 1$ (p Primzahl) Punkte. Es folgt dann, daß je zwei Geraden genau einen Schnittpunkt haben und die Gültigkeit des Dualitätsprinzips. Insgesamt gibt es $\lambda(\lambda - 1) + 1 = \sigma = p^{2n} + p^n + 1$ Punkte (Geraden). Die Geometrie wird durch eine Inzidenztafel völlig beschrieben. Die analytische Definition legt ein Galoisfeld der Ordnung p^n , G.F. $[p^n]$, zugrunde; ein Punkt ist definiert durch ein Tripel homogener Koordinaten, eine Gerade durch eine homogene lineare Gleichung im G.F. Es wird erörtert, wie man, ausgehend von einer geeigneten linearen Transformation im G.F., eine die Geometrie beschreibende Inzidenztafel gewinnen kann. — Seien die σ Punkte einer endlichen ebenen projektiven Geometrie mit den Zahlen eines vollständigen Restesystems mod σ bezeichnet; dann erhält man durch folgendes Verfahren eine den geometrischen Axiomen genügende Inzidenztafel: Man wähle für die λ kollinearen Punkte der ersten Geraden solche Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_\lambda$ des Restesystems, für die alle Differenzen $x_i - x_k$ zu je zweien inkongruent mod σ sind, auf der l -ten Geraden liegen dann die Punkte $x_1 + l, x_2 + l, \dots, x_\lambda + l \pmod{\sigma}$. — Es folgt eine kurze projektive Einführung der Kegelschnitte und am Schluß eine Anwendung der k -dimensionalen projektiven Geometrie über einem Galoisfeld der Ordnung 2 auf die Theorie des Spieles „Nim“. *R. Moufang* (Frankfurt a. M.).

Nakasawa, Takeo: Zur Axiomatik der linearen Abhängigkeit. III. *Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A* **3**, 123—136 (1936).

Die Formalisierung und Axiomatisierung der linearen Abhängigkeit nach dem Vorbild eines „Zyklenkalküls“ hat Verf. in zwei früheren Arbeiten durchgeführt (s. dies. Zbl. **12**, 220 u. **13**, 314). Hier wird das Axiomensystem noch einmal zusammengestellt, mit dem Veblen-Youngschen Axiomensystem der projektiven Geometrie ver-

glichen und der Kalkül des Verf. zu anderen verwandten Gebieten in Beziehung gesetzt (Allgemeiner linearer Raum, Boolesche Algebra und Verbandstheorie u. ä.). Abschließend folgt eine Untersuchung über axiomatische Unabhängigkeit: Es wird ein zweites Axiomensystem aufgestellt, das dem ersten äquivalent ist, und von ihm gezeigt, daß jedes Axiom von den übrigen unabhängig ist. *R. Moufang.*

Cavallaro, Vincenzo G.: *L'approssimata rappresentazione e la quasi simultanea costruzione rettilinea di varie serie, di elementi e problemi notevoli non costruibili elementarmente.* Tôhoku Math. J. 42, 372—380 (1936).

Es wird eine einfache Konstruktion des Winkels von 3° angegeben und dann verschiedene Beispiele genannt, in denen einfache Ausdrücke, die $\sin 3k$ enthalten, gute Approximationen ergeben. *O. Neugebauer (Kopenhagen).*

Piazzolla Beloch, Margherita: *Sulla risoluzione dei problemi di terzo e quarto grado col metodo del ripiegamento della carta.* Scritti mat. Luigi Berzolari 93—95 (1936).

Weiszfeld, E.: *Sur un problème de minimum dans l'espace.* Tôhoku Math. J. 42, 274—280 (1936).

Sur un problème de R. Sturm: trouver le point pour lequel la somme des distances aux sommets d'un tétraèdre est minimum. On appelle tétraèdre du 1^{er} type celui, pour lequel la somme des angles de chaque trièdre est inférieure à 4π ; dans les autres tétraèdres (du 2^o type) il y a un seul sommet („le sommet obtus“) dont le trièdre donne un angle total au moins égal à 4π . Démonstration des théorèmes suivants. I. Il y a un seul point à l'intérieur du tétraèdre du 1^{er} type, qui joint aux sommets définit quatre trièdres égaux; ce point est le point-minimum. II. Le point-minimum du tétraèdre de 2^o type est le sommet obtus. *O. Bottema (Deventer, Holl.).*

Weiszfeld, E.: *Sur une propriété des points et des droites de Kantor.* Tôhoku Math. J. 42, 281—283 (1936).

Soit donné le quadrilatère inscriptible $A_1 A_2 A_3 A_4$; Q_1, Q_2 sont 2 points du cercle circonscrit. Les 2 droites de Simson de Q_1, Q_2 relatives au triangle $A_2 A_3 A_4$ etc. se rencontrent en P_1 etc.; les 4 points P_i sont sur une droite (de Kantor). Si Q_1, Q_2, Q_3 sont 3 points du cercle, les 3 droites de Kantor de $Q_2 Q_3$ etc. passent par un point (de Kantor). Soit $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ un pentagone inscrit, les 5 points de Kantor de $Q_1 Q_2 Q_3$ relatifs à $A_2 A_3 A_4 A_5$ etc. sont sur une droite de Kantor, etc. — Théorème. Soit donnée une famille de polygones de Poncelet de n côtés; prenons $n - 2$ points du cercle circonscrit: les droites de Kantor passent par un point; prenons $n - 1$ points du cercle: les points de Kantor sont sur une circonférence. Démonstration à l'aide du plan complexe de Gauss. *O. Bottema (Deventer, Holl.).*

Delens, Paul: *Études sur le tétraèdre.* C. R. Acad. Sci., Paris 204, 319—321 (1937).

Extensions des résultats obtenus par l'auteur dans C. R. Acad. Sci., Paris 203, 837—839 et 1213—1215 (1936), ce Zbl. 15, 223 et 265. 1. Définition de deux angles de Brocard, U et U' , pour le tétraèdre: $\cot U = \cot A + \cot B + \cot C + \cot D$; $24 V \cot U' = abc + ab'c' + b'c'a' + c'a'b'$. Cercle et ellipsoïde de Brocard. 2. Pour le tétraèdre isodynamique ($aa' = bb' = cc'$) on a $U = U'$. Analogies avec le cas du triangle. 3. Remarques sur l'inversion tétraédrique normale. *O. Bottema.*

Haag, F.: *Die Polygone der Ebenenteilungen.* Z. Kristallogr. A 96, 78—80 (1937).

Mit Hilfe der Ebenenteilungen kann gezeigt werden, daß die von Niggli [Z. Kristallogr. 70 (26), 353] zu 31 bestimmte Anzahl von bez. Symmetrie und Verknüpfung verschiedener Kreispackungen um 2 zu vermehren ist. Es gibt also 33 verschiedene Kreispackungen. *F. Laves (Göttingen).*

Kempner, Aubrey J.: *On the shape of polynomial curves. II.* Tôhoku Math. J. 42, 318—330 (1936).

Continuation of an article of the same title, Tôhoku Math. J. 37, 347—362 (this Zbl. 7, 323). The author considers the case: $f(x)$ has $k < n - 1$ extremes and more than the minimum number $k - 1$ of points of inflection. Theorem: All topologically

possible types of curves exist. The 2 articles give a complete examination of the qualitative distribution of extremes and points of inflection along polynomial curves.

O. Bottema (Deventer, Holl.).

Krishnaswami Ayyangar, A. A.: Geometry of the tricuspoid hypocycloid. *Math. Student* 4, 130—143 (1937).

The abbreviation "tricuspid" is used for the tricuspoid hypocycloid, which touches the line at infinity at the circular points. If a transversal cut the sides of the triangle ABC at D, E, F , such that $BC \cdot BD + CA \cdot CE + AB \cdot AF = \Omega$ (a constant), then it envelopes a tricuspoid inscribed in the triangle. DE is a θ -pedal line of ABC (generalized Simson-line); $\Omega = 2\Delta (\sum \cot A - \cot \theta)$. BD, CE and EF are used as a special set of line-coordinates of DE . The mean centre of the intersections of n given tangents t_i of the tricuspoid with a tangent t is defined as a mean-centre associated to t_i . The locus of the mean-centres associated to t_i is an ellipse having triple contact with the tricuspoid. If $P_1 P_2 P_3$ be the points of intersection of a tangent with concurrent tangents OT_i , then $\sum \frac{OP_i}{OT_i} = 1$, $\sum \frac{1}{OP_i \cdot OT_i} = 0$. The hexad of common tangents to a tricuspoid and a conic, etc.

O. Bottema (Deventer, Holl.).

Wasteels, C. E.: Einige Eigenschaften der zyklidalen Kurven und Ausdehnung des Theorems von Fagnano auf diese Kurven. *Wis- en Natuurkdg Tijdschr.* 8, 181 bis 202 (1937) [Holländisch].

Die Arbeit handelt von der Bogenlänge der verlängerten und verkürzten Epizykloiden und deren sphärischer Analogoga. Sie ist dem Ref. im übrigen unverständlich, da ein gewisser Punkt M_1 , der nicht auf der Kurve liegt, dauernd als Punkt der Kurve behandelt wird.

van der Waerden (Leipzig).

Coxeter, H. S. M.: On Schläfli's generalization of Napier's pentagramma mirabile. *Bull. Calcutta Math. Soc.* 28, 123—144 (1936).

Sind v_i ($i = 0, \dots, 4$) die fünf Stücke eines rechtwinkligen sphärischen Dreieckes, die in der Napierschen Regel vertauscht werden dürfen, so erhält man nach einem unveröffentlichten Satze von Dr. G. T. Bennet ein ebenes Diagramm des sphärischen Dreieckes, wenn man über den fünf Punkten X_0, \dots, X_4 einer Geraden die fünf Halbkreise mit den Durchmessern $X_1 X_3, X_2 X_4, X_0 X_3, X_1 X_4, X_0 X_2$ zum Schnitt bringt und das entstehende Kreisfünfeck betrachtet. Dieses hat die Winkel $2v_i$ ($i = 0, \dots, 4$). Dieser Satz wird auf den Raum von m Dimensionen verallgemeinert. Man erhält dadurch ein ebenes Diagramm des m -dimensionalen Orthoschemas, indem man über $m+2$ Punkten X_i die $m+2$ Halbkreise $X_{i-1} X_{i+1}$ zum Schnitt bringt und das entstehende Kreis- $(m+2)$ -Eck betrachtet, das die doppelten Winkel $2v_i$ des Orthoschemas hat. Daraus werden weitere Beziehungen zwischen den sphärischen Stücken hergeleitet.

J. J. Burckhardt (Zürich).

Bilimovitch, Anton: Von unabhängigen Produkten zweier Vektoren. *Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade* Nr 3, 101—106 (1936).

Neder, Ludwig: Über ein Dualitätsprinzip für die Zweitafelprojektion, speziell für die zweifach orthogonale. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, N. F.* 1, 169—170 (1937).

Verf. erweitert eine schon früher erwähnte Dualität (dies. Zbl. 14, 272) auf eine Klasse besonderer Zweibildersysteme, zu der auch die Abbildung mittels Grund- und Aufriß gehört.

J. L. Kramers (Graz).

Analytische und algebraische Geometrie:

Edge, W. L.: A formula for a twisted curve. *J. London Math. Soc.* 12, 29—32 (1937).

Es seien r der Rang und p das Geschlecht einer algebraischen Raumkurve C ; es seien weiter t die Anzahl der Dreitangentialebenen von C und t' dual die Anzahl der Punkte, durch welche drei verschiedene Tangenten von C hindurchgehen; C besitze eine Doppel- oder Inflexionstangente. Es gilt dann folgende Formel: $3(t + t')$

$= (r-4)(r-5)(r-6) - 4p(r-10)$. Zum Beweis benutzt Verf. die Darstellung der Tangenten von C auf die Punkte einer Kurve Γ der Ordnung r auf einer Quadrik eines fünfdimensionalen Raumes; den t und t' obengenannten Ebenen und Punkten entsprechen im S_5 ebenso viele Ebenen von Ω , die Γ dreimal schneiden. Ihre gesamt Anzahl kann leicht bestimmt werden, indem man auf Γ zwei geeignete Korrespondenzen betrachtet und ihre gemeinsamen Paare entsprechender Punkte auf zwei verschiedenen Arten berechnet. *E. G. Togliatti (Genova).*

Todd, J. A.: Some types of rational quartic primal in four dimensions. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. 42, 316—323 (1936).

In einem Raume S_4 betrachtet man eine Fläche φ , die einen einzigen scheinbaren dreifachen Punkt besitzt; durch jeden Punkt allgemeiner Lage geht dann eine einzige Trisekante von φ hindurch. Eine V_3^4 ist rational, sobald sie φ enthält; und die verschiedenen Trisekanten von φ , die von den einzelnen Punkten von V_3^4 ausgehen, liefern sofort ihre eindeutige Abbildung auf eine Hyperebene Σ ; die so gewonnene Abbildung ist nicht immer einfach, kann aber oft durch eine geeignete Cremonasche Verwandtschaft vereinfacht werden. Den verschiedenen Arten der Fläche φ , die allbekannt sind (s. z. B. C. Segre, *Enzykl. d. math. Wiss.*, III C 7, Fußnote 417), entsprechen dann folgende Formen des Abbildungssystems $|F|$ von V_3^4 : 1. φ ist eine F^7 , deren Schnittkurven das Geschlecht 3 haben; V_3^4 ist dann eine Determinanten- V^7 und $|F|$ besteht aus Flächen F^4 , die eine $_{11}C^{10}$ des Geschlechts 11 einfach enthalten. 2. φ ist die Projektion einer Fläche F^5 von Del Pezzo; $|F|$ besteht aus Flächen F^7 , die einen Doppelkegelschnitt besitzen und eine $_{9}C^{10}$ einfach enthalten, die mit jenen Kegelschnitt 9 Punkte gemein hat. 3. φ ist eine rationale normale Regelfläche F^7 ; $|F|$ besteht aus F^4 , die eine $_{7}C^9$ einfach enthalten. 4. φ ist die Projektion einer Veronesischen Fläche; $|F|$ besteht aus F^6 , die eine rationale C^4 doppelt und eine $_{7}C^{12}$ einfach enthalten; C^4 und C^{12} haben 24 Punkte gemein. 5. φ besteht aus einer kubischen Regelfläche und einer Ebene; in diesem Falle ist das obengenannte Verfahren nicht geeignet; man beweist leicht analytisch, daß V_3^4 die Projektion der Schnitt- V_3^8 von drei Quadriken des Raumes S_6 aus einer ihrer Geraden ist im Fall wo die V_3^8 eine Ebene enthält und daher rational ist; $|F|$ besteht aus F^4 , die eine $_{9}C^9$ und eine ihrer Trisekanten enthält. 6. Wenn φ aus drei Ebenen besteht, erhält man eine längst bekannte V_3^4 (dies. Zbl. 7, 32); $|F|$ besteht aus F^5 mit drei dreifachen Punkten A, B, C und die eine $_{9}C^{13}$ enthalten, für welche A, B, C vierfach sind. *E. G. Togliatti (Genova).*

Enriques, Federigo: Sulle singolarità che nascono per proiezione di una superficie o varietà algebrica. *Scritti mat. Luigi Berzolari* 351—352 (1936).

Godeaux, Lucien: Sur les points unis parfaits des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 6, 37—40 (1937).

Chow, Wei-Liang, und B. L. van der Waerden: Zur algebraischen Geometrie. IX. Über zugeordnete Formen und algebraische Systeme von algebraischen Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.* 113, 692—704 (1937).

Given an r -dimensional algebraic variety M in a projective space S_n , it is shown how to construct a polynomial $F(u^0, u^1, \dots, u^r)$, homogeneous and of like degree in each set of indeterminates $u_0^i, u_1^i, \dots, u_n^i$, whose vanishing expresses the fact that the $r+1$ hyperplanes u^i have a point in common on M . The form F is called the associated form of the variety M . F is irreducible, if M is irreducible; its coefficients are in the underlying field of constants and its degree is the degree of M . A form F , of a given degree, must satisfy certain conditions in order that it could be regarded as the associated form of some variety M . It is shown that these conditions are expressed by algebraic relations between the coefficients of the form. From these it follows that the algebraic varieties of a given degree in S_n , or, more generally, on a given variety M_0 in S_n , form an algebraic system. — The notion of an associated form is applied to the theory of algebraic correspondences between varieties and leads

to a precisation of the meaning of the assertion: "in an algebraic correspondence between two algebraic varieties, the varieties which correspond on one variety to the points of the other variety generally form an algebraic system". (VIII. see this Zbl. 14, 365.)

O. Zariski (Baltimore).

Waerden, B. L. van der: Zur algebraischen Geometrie. X. Über lineare Scharen von reduziblen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 113, 705—712 (1937).

A re-elaboration of the well known algebro-geometric proofs of the two theorems of Bertini concerning linear systems of curves on an algebraic surface (systems of degree zero, reducible systems). Special attention is given to the proof of the following property which has been used in the geometric proof: if the general curve of a rational system, i. e. of a system depending rationally on certain parameters, is reducible, then the irreducible components of the general curve depend algebraically upon the parameters of the system. By means of the associated form of the general curve of the system (see the preceding review) the proof of this property, also for systems of varieties, is reduced to the proof of the similar property of reducible polynomials. The paper also contains a generalization of the theorems of Bertini to linear systems of $(r-1)$ -dimensional varieties on a V_r [for systems in a linear space S_r these theorems are due to Bertini, "Sui sistemi lineari di grade zero". Rend. Accad. Lincei 10 (5) (1901)].

O. Zariski (Baltimore).

Zariski, Oscar: A theorem on the Poincaré group of an algebraic hypersurface. Ann. of Math., II. s. 38, 131—141 (1937).

Es sei V_{r-1} eine algebr. Hyperfläche in S_r und S_{r-1} eine Hyperebene in nicht-spez. Lage zu V_{r-1} , schließlich V_{r-2} der Durchschnitt von S_{r-1} und V_{r-1} . Dann ist für $r > 2$ die Wegegruppe von $S_r - V_{r-1}$ gleich der von $S_{r-1} - V_{r-2}$. Durch wiederholte Anwendung folgt, daß die Wegegruppe von $S_r - V_{r-1}$ gleich der der Komplementärmenge eines nichtspeziellen ebenen Schnittes von V_{r-1} ist. Der Begriff der „speziellen Lage“ wird genau definiert.

van der Waerden (Leipzig).

Eger, Max: Sur les systèmes canoniques d'une variété algébrique. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 217—219 (1937).

In einer früheren Abhandlung (dies. Zbl. 15, 272) hat Verf. den Begriff der Berührungsmannigfaltigkeit von $\lambda + 1$ Hyperflächenbüscheln einer V_n benutzt, um kanonische Systeme auf V_n zu definieren. Jetzt betrachtet er auf V_n $\lambda - \varrho + 1$ rationale Funktionen $\varphi_0 \varphi_1 \dots \varphi_{\lambda-\varrho}$ und ϱ einfache Integrale 1. Gattung $u_1 u_2 \dots u_\varrho$; sie besitzen eine Berührungsmannigfaltigkeit Σ ; und man findet für Σ den symbolischen Ausdruck: $K_\lambda (1 + \varphi_0)^2 (1 + \varphi_1)^2 \dots (1 + \varphi_{\lambda-\varrho}^2)$; die Quadrate sind zu entwickeln; und jedes Glied $K_\lambda (\varphi_0^{\alpha_0} \varphi_1^{\alpha_1} \dots \varphi_{\lambda-\varrho}^{\alpha_{\lambda-\varrho}})$ bedeutet eine kanonische Mannigfaltigkeit der Dimension λ für $(\varphi_0^{\alpha_0} \varphi_1^{\alpha_1} \dots \varphi_{\lambda-\varrho}^{\alpha_{\lambda-\varrho}})$, wo die φ_i die Polar- V_{n-1} der gegebenen rationalen Funktionen sind (die sinnlosen Glieder der Entwicklung sind gleich Null zu setzen). Diese Formel wird dann auf den Fall $\varrho = 0$ ausgedehnt. Als Anwendung derselben Formel findet man einen ähnlichen Ausdruck für die Berührungsmannigfaltigkeit von $u_1 u_2 \dots u_\varrho$ und von k Linearsystemen der Dimensionen $\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_k + 1$, wo $\Sigma \lambda_i = \lambda - \varrho + 1$. Verschiedene andere Anwendungen folgen. Die Beweise sind immer nur angedeutet.

E. G. Togliatti (Genova).

Roth, L.: Sulle varietà semi-razionali a tre dimensioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 24, 351—354 (1936).

Vorläufige Mitteilung der wichtigsten Ergebnisse einer Untersuchung über $V_3^{2\pi-2}$ eines Raumes $S_{\pi+1}$, deren Schnittflächen alle Geschlechter gleich 1 haben. Alle Geschlechter einer solchen $V_3^{2\pi-2}$ sind gleich Null; $V_3^{2\pi-2}$ ist die vollständige Schnitt- $V_3^{2\pi-2}$ von $\binom{\pi-2}{2}$ Quadriken; die Hyperflächen einer beliebigen Ordnung schneiden auf $V_3^{2\pi-2}$ ein vollständiges Linearsystem; jede auf $V_3^{2\pi-2}$ liegende algebraische Fläche ist die

vollständige Schnittfläche der V_3 mit einer Hyperfläche usw. Für $\pi = 3, 4$ hat man zwei bekannte V_3^4 und V_3^6 . Für $\pi = 5$ hat man die Schnitt- V_3^8 von drei Quadriken eines Raumes S_6 ; es wird hier angekündigt, daß diese V_3^8 irrational ist, wenigstens im allgemeinen Falle (in einem besonderen Falle, wo sie zwei Doppelpunkte besitzt, bleibt ihre Irrationalität zweifelhaft); und daraus kann man die Existenz irrationaler Involutionen 4. Ordnung im Raume S_3 schließen. Für $\pi = 6, 7$ hat man andere V_3 , die, wie die vorige, auf geeigneten V_3^4 des Raumes S_4 abgebildet werden. Die Vermutung des Verf., daß die betrachteten $V_3^{2\pi-2}$, Kegel- und Regel- V_3 ausgeschlossen eine endliche Reihe bilden, hat vor kurzem eine bejahende Antwort erhalten (G. Fan, dies. Zbl. 15, 123 u. 372).

E. G. Togliatti (Genova).

Differentialgeometrie:

Mitrinovitč, Dragoslav S.: Asymptotiques d'une classe de surfaces et équations différentielles linéaires du second ordre s'y rattachant. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 1047—1049 (1936).

Es handelt sich um Flächen mit den Gleichungen $z + vy = F(x, v)$, $z = \partial F / \partial v$, wobei F ein Polynom in dem zu eliminierenden Parameter v ist. W. Feller.

Guigue, René: Sur un problème d'asymptotiques. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 69, 1097—1105 (1936).

Die Bestimmung der Flächen, deren Asymptotenlinien sich in eine vorgegebene Kurvenschar $y(x, y) = \text{konst.}$ projizieren, führt auf eine partielle Differentialgleichung. Es werden Fälle untersucht, wo sie sich auf die Wärmeleitungsgleichung zurückführen läßt.

W. Feller (Stockholm).

Hahn, J. W., and E. F. Beckenbach: Triples of conjugate harmonic functions and minimal surfaces. Duke math. J. 2, 698—704 (1936).

Three harmonic functions $x_j(u, v)$, $j = 1, 2, 3$, given in a domain D of the (u, v) -plane, are said to form a triple of conjugate harmonic functions if $E = G$, $F = 0$, where $E = x_1^2, u + x_2^2, u + x_3^2, u$, $G = x_1^2, v + x_2^2, v + x_3^2, v$, $F = x_1, u x_1, v + x_2, u x_2, v + x_3, u x_3, v$ (the second subscripts denote differentiation). The surface S , defined by the equations $x_j = x_j(u, v)$, is then a minimal surface. If $x_3(u, v) \equiv 0$, then $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$ form a pair of conjugate harmonic functions in the sense of the theory of analytic functions of a complex variable. The purpose of the paper is to contribute to the study of this classical analogy between minimal surfaces and analytic functions. The following two theorems, in which $x_j(u, v)$, $j = 1, 2, 3$, denotes a triple of conjugate harmonic functions, given in a domain D , illustrate the character of the results. Theorem: If $x_j(u, v) = c_j$, $j = 1, 2, 3$, where each c_j is a constant, on a set of points with a limit point interior to D , then $x_j(u, v) \equiv c_j$. Theorem: Let S be the minimal surface given by the equations $x_j = x_j(u, v)$, and let the direction cosines of the normal to S be denoted by $X_j(u, v)$. If $X_j(u, v) = c_j$, $j = 1, 2, 3$, where each c_j is a constant, on a set of points with a limit point interior to D , then $X_j(u, v) \equiv c_j$. That is, S reduces to a plane. The proofs depend upon a discussion of the coefficients in the Fourier expansions of the harmonic functions $x_j(u, v)$.

Tibor Radó (Columbus).

Pirková-Kofráňková, V.: Sur des courbes dont le rayon de courbure est une combinaison linéaire des rayons de courbure d'un nombre fini de courbes données. Publ. Fac. Sci. Univ. Charles Nr 150, 33—36 u. franz. Zusammenfassung 37 (1936) [Tschechisch].

Seetharaman, V.: Differential invariants for path spaces of order 2. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 5, 161—165 (1937).

In an n -dimensional space a system of paths is given by the differential equation of order 3

$$x'' + \alpha^x(x, x, x, t) = 0; \quad \left(\overset{(i)}{p} = \frac{d^i p}{dt^i} \right). \quad (1)$$

vectors and tensors are defined with respect to the transformations: $x^{\kappa'} = x^{\kappa}(x)$, $t' = t$. A differential operator for vectors $u^{\kappa}(x, x, x, t)$ is defined by a set of n^2 coefficients $\gamma_{\lambda}^{\kappa}$ (Comp. D. D. Kosambi, this Zbl. 12, 358).

$$Du^{\kappa} = u^{\kappa} + \gamma_{\lambda}^{\kappa} u^{\lambda}.$$

The functions $\gamma_{\lambda}^{\kappa}$ transform in such a way that Du^{κ} is a vector. Then the equations of variation belonging to the system (1) can be written in the form

$$D^3 u^{\kappa} + P_{\frac{1}{2}\lambda}^{\kappa} D^2 u^{\lambda} + P_{\frac{1}{1}\lambda}^{\kappa} D u^{\lambda} + P_{\frac{0}{0}\lambda}^{\kappa} u^{\lambda} = 0,$$

where $P_{\frac{0}{0}\lambda}^{\kappa}$, $P_{\frac{1}{1}\lambda}^{\kappa}$ and $P_{\frac{1}{2}\lambda}^{\kappa}$ are expressions in the derivatives of α^{κ} and $\gamma_{\lambda}^{\kappa}$. The condition $P_{\frac{2}{2}}^{\kappa} = 0$ gives $3\gamma_{\lambda}^{\kappa} = \partial \alpha^{\kappa} / \partial x^{\lambda}$. The fundamental differential operators are

$$D, \quad \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}, \quad \frac{\partial}{\partial t}.$$

The differential invariants of the space can be derived from the process of alternating these operations. This leads to two new operators

$$V_{\frac{1}{1}\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \dots; \quad V_{\frac{0}{0}\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \dots$$

The author gives a list of invariants of the space. The Euler equations belonging to a function $f(x, x, x, t)$ are written in the invariant form. *J. Haantjes* (Delft).

Allgemeine metrische Geometrie, Integralgeometrie, Konvexes und Verwandtes:

Pasqualini, Louis: Sur les conditions de convexité d'une courbe plane ou d'une surface. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 1050—1058 (1936).

Sätze für die Ebene und den dreidimensionalen Raum, deren p -dimensionale Verallgemeinerungen schon in einer inzwischen erschienenen Note des Verf. (vgl. dies. Zbl. 15, 315) behandelt sind. [Im letzten Satz dieses Ref. ist nach „Hyperflächenstück“ einzufügen, „das durch eine Funktion $x_p = f(x_1, \dots, x_{p-1})$ mit konvexem Definitionsbereich darstellbar ist.“] *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Pasqualini, Louis: Convexité d'une rondelle de surface $z = f(x, y)$ projetée sur le plan xOy suivant une figure convexe K et dont le ptg_2 (= paratingent second) est vide, sauf sur un ensemble punctiforme. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 646—648 (1937).

Aus Konvexität im Kleinen in allen Punkten eines Flächenstücks der im Titel genannten Art mit Ausnahme der Punkte einer Menge, die kein Kontinuum enthält, folgt Konvexität des Flächenstücks im Großen. (Vgl. auch vorst. Ref. und dies. Zbl. 15, 315.) *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Santaló, L. A.: Integralgeometrie XV. Hauptformel des kinematischen Maßes für bewegliche Zylinder und parallele Ebenen. Abh. math. Semin. Hansische Univ. 12, 8—41 (1937) [Spanisch].

Verf. gewinnt durch einen Grenzübergang aus der kinematischen Hauptformel (vgl. Blaschke, dies. Zbl. 14, 274) die entsprechenden Formeln für den Fall, daß an die Stelle von \mathcal{G}_1 ein beliebiger Zylinder bzw. eine von zwei parallelen Ebenen begrenzte Scheibe tritt, und gibt die entsprechenden Verallgemeinerungen auf 3 Figuren an. Für den Spezialfall konvexer Figuren hatte der Verf. diese Ergebnisse schon früher gewonnen (vgl. dies. Zbl. 14, 125).

Blaschke, Wilhelm: Integralgeometrie. XXII. Über geschlossene Kurven und Flächen in der elliptischen Geometrie. Abh. math. Semin. Hansische Univ. 12, 111—113 (1937).

Es handelt sich um die integralgeometrische Auswertung eines gewissen ganzzahligen Index, der sich einer geschlossenen Kurve in der (elliptischen) Ebene bzw. einer geschlossenen Fläche im Raume zuordnen läßt. Das auf die Ebene bezügliche Ergebnis beruht auf einem Versehen. Der fragliche Index ist, wie sich auch leicht

direkt zeigen läßt, gleich der Eulerschen Charakteristik von Kurve bzw. Fläche, also stets 0 für die Kurve. (XXI. vgl. dies. Zbl. 15, 409.) *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Haimovici, M.: *Géométrie intégrale sur les surfaces courbes.* Ann. Sci. Univ. Jassy 23, 57—74 (1937).

Ausführung der Beweise für die in einer früheren Note (vgl. dies. Zbl. 14, 23) mitgeteilten Ergebnisse. Neben den im genannten Ref. angeführten Sätzen sei noch die eindeutige Kennzeichnung der Dichte der geodätischen Linien durch Invarianteigenschaften hervorgehoben. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Topologie:

Whitehead, J. H. C.: On doubled knots. J. London Math. Soc. 12, 63—71 (1937).

Sind k und k' zwei isotope Knoten, die durch einen Parameter t eindeutig und stetig so aufeinander bezogen sind, daß die entsprechenden Punkte Strecken bestimmen, welche ein doppelpunktfreies zweiseitiges Band b überstreichen, so entsteht ein verdoppelter Knoten c , indem aus k und k' zwei entsprechende kleine Stücke P_1P_2 und $P'_1P'_2$ herausgeschnitten und P_1 mit P'_1 sowie P_2 mit P'_2 durch zwei Bögen verbunden werden, die sich einmal umschlingen. Die Kurve c ist i. d. Verknötet. Das Alexandersche Polynom $\Delta(x)$ von c hängt nur von der Verdrillungszahl ϱ des Bandes b ab und ist

$$\Delta(x) = \varrho - (2\varrho + 1)x + \varrho x^2,$$

also insbesondere gleich 1, falls $\varrho = 0$ ist. *K. Reidemeister* (Marburg a. d. L.).

Kérékjártó, B. de: Sur la structure des transformations topologiques des surfaces en elles-mêmes. Enseignement Math. 35, 297—316 (1936).

An exposition concerned with some of the solved and unsolved problems of the structure of topological surface transformations. Many of the results considered are due to the author (see, e.g., this Zbl. 8, 226, 372, 373; 9, 183; 10, 39, 179; 12, 36, 37, 319).

Hedlund (Bryn Mawr).

Seifert, Herbert: Bemerkungen zur stetigen Abbildung von Flächen. Abh. math. Semin. Hansische Univ. 12, 29—37 (1937).

F bzw. f seien orientierbare, geschlossene Flächen vom Geschlecht $H > 0$ bzw. h und F sei in f stetig mit einem Abbildungsgrad c abgebildet. Dann ist $H - 1 \geq |c|(h - 1)$, wie H. Kneser in Math. Ann. 103, 358 bewiesen hat. Für diesen Satz gibt Verf. einen neuen Beweis. Falls die Bildmenge von F speziell eine Überlagerung von f darstellt, ergibt er sich unmittelbar aus der an einer Triangulierung abzulesenden Eulerschen Charakteristik, und zwar mit dem Gleichheits- bzw. Ungleichheitszeichen, je nachdem die Überlagerung unverzweigt oder verzweigt ist. Nun läßt sich eine stetige Abbildung zwar im allgemeinen nicht in eine Überlagerung deformieren, wohl aber in eine Abbildung von ähnlich einfacher Art, die der Verf. als „gefaltete Überlagerung“ bezeichnet und für die er durch eine Reihe von Umformungsprozessen die Formel beweist. — Weiter wird gezeigt, daß aus der Gültigkeit der Gleichheit in der Kneserschen Formel und $c \neq 0$ folgt, daß die Abbildung sich in eine unverzweigte Überlagerung deformieren läßt, indem man zunächst wieder zu einer gefalteten Überlagerung übergeht und die Falten auf dieser unter den gemachten Voraussetzungen durch Deformation beseitigen kann. Insbesondere ist also jede stetige Selbstabbildung vom Grad ± 1 in eine topologische Selbstabbildung deformierbar. Für homöomorphe F und f leitet Verf. daraus einen einfachen Beweis des Satzes her, daß jeder Isomorphismus zwischen den Fundamentalgruppen von F und f sich durch eine topologische Abbildung von F auf f bewirken läßt.

Jakob Nielsen (Kopenhagen).

Freudenthal, Hans: Über Mannigfaltigkeiten und ihre Abbildungen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 40, 54—60 (1937).

Verf. untersucht die Zusammenhänge zwischen der klassischen Homologietheorie und der neueren Theorie von Kolmogoroff, Alexander u. a. Er folgt dabei der letzten Darstellung von Alexander [Ann. of Math. (2) 37, 698—708; dies. Zbl. 15, 129].

a. wird die Isomorphie zweier Schnittringe, des auf der Schnitttheorie von Lefschetz begründeten und des durch das Alexandersche Verfahren hergestellten, noch als festgestellt (zum erstenmal wurde diese Isomorphie von Čech bewiesen). Ferner wird in analoger Weise die Isomorphie des Alexanderschen Ringes mit dem Gordon-Ringen [Ann. of Math. (2) 37, 519—525; dies. Zbl. 15, 84] festgestellt. In allen diesen Betrachtungen spielt der Begriff der Gruppidualität (im Sinne der allgemeinen Charakterentheorie) die wesentliche Rolle sowie die Alexander-Čech-Whitneysche Theorie einer festen Ordnung in der Eckpunktmenge der betrachteten Komplexe. Ferner werden in die neue Homologietheorie die sich auf die klassische Theorie beziehenden Resultate von Hopf über den Ringhomomorphismus der Mannigfaltigkeiten stetigen Abbildungen derselben übertragen. Schließlich wird eine Folge von Mannigfaltigkeiten $\{M_k\}$, in der M_{k+1} auf M_k stetig abgebildet wird, betrachtet und zum entsprechenden Limesraum übergegangen (dieser Limesprozeß, der eine Weiterentwicklung der Projektionsspektren darstellt, wird als R_n -adisch bezeichnet). Für den Limesraum gilt eine auf die Betrachtung der entsprechenden Homomorphismenfolge für die Bettischen Gruppen der einzelnen M_k gegründete Schnitttheorie. Für den Limesraum behauptet der Verf. auch die Gültigkeit von Dualitätssätzen vom Alexander-Typus.

P. Alexandroff u. L. Pontrjagin (Moskau).

Rham, Georges de: Sur les nouveaux invariants topologiques de M. Reidemeister. *Ann. math. Moscou*, N. s. 1, 737—742 (1936).

Bericht über die Untersuchungen von Alexander, Reidemeister, Franz (dies. Zbl. 12, 127) und dem Verf. über die Homöomorphie der Linsenräume in Zusammenhang mit dem Homöomorphieproblem für beliebige n -dimensionale Kugeldrehungen. Eine ausführliche Darstellung mit Beweisen wird in Aussicht gestellt. *van der Waerden.*

Appert, Antoine: Sur les relations entre les espaces de Linfield et les complexes. *R. Acad. Sci., Paris* 204, 323—325 (1937).

Ein Linfieldscher Raum ist eine Menge, in der ein symmetrischer Nachbarschaftsbegriff eingeführt ist: Von je zwei Elementen der Menge weiß man, ob sie benachbart sind oder nicht. Außerdem wird zweckmäßigerweise auch die Reflexivität verlangt (jedes Element ist mit sich selbst benachbart). Betrachtet man die Menge aller mit einem Element p benachbarter Elemente als die (einzige) Umgebung von p , so kann der Linfieldsche Raum als Umgebungsraum aufgefaßt werden, so daß von Stetigkeit einer Abbildung und sonstigen allgemeintopologischen Begriffen die Rede sein kann. Jeder simpliziale Komplex (allgemeiner: jeder Eckpunktbereich) führt zu einem Linfieldschen Raum: die Eckpunkte sind Elemente des Raumes, zwei Eckpunkte sind benachbart, wenn sie beide zum Eckpunktgerüst eines Simplexes gehören. Wie leicht ersichtlich, kann dabei verschiedenen Komplexen derselbe Linfieldsche Raum entsprechen. Dagegen ist die Beziehung zwischen einem Komplex und dem zugehörigen Linfieldschen Raume immer dann eineindeutig, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Wenn in einer Menge von Eckpunkten je zwei Elemente zu einem Gerüst gehören, so ist die ganze Menge ein Gerüst. Komplexe, die diese Bedingung erfüllen, heißen Linfieldsche Komplexe. Insbesondere ist die baryzentrische Unterteilung eines beliebigen Komplexes immer ein Linfieldscher Komplex. Hieraus folgt, daß jedes Polyeder (d. h. jede Punktmenge eines R^n , welche so in Simplexe zerlegt werden kann, daß ein Komplex entsteht) immer als Vereinigungsmenge der Simplexe eines Linfieldschen Komplexes betrachtet werden kann.

P. Alexandroff (Moskau).

Astrophysik.

Morgan, Herbert R.: Some problems in fundamental astronomy. *Science* 85, 1—9 (1937).

Bericht über Aufgaben, Methoden und Resultate der Ortsbestimmung von Fixsternen, ihrer Eigenbewegungen usw.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

Lindblad, Bertil: On the velocity ellipsoid and the general star-streaming in the region around the sun. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **97**, 15—24 (1936).

The stellar velocity distribution in the immediate vicinity of the sun is determined in terms of the integrals of motion as variables. A special case of this distribution is the velocity ellipsoid usually assumed by the theory of galactic rotation to exist in our stellar system. Departures from strictly ellipsoidal distribution are classed into "secular" and "accidental" ones. The latter are assumed to cancel out while the former produce what we call local streamings. The origin of these streams as well as of other observed features of the galaxy are discussed on the basis of the general theory previously worked out by the author, whereby it is shown that all these phenomena are in general accordance with theoretical predictions. *Kyrill Ogrodnikoff.*

Mineur, Henri: On the galactic rotation of the globular clusters system: Some comments on F. K. Edmondson's paper. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **97**, 150—153 (1937).

Gegenüber den von Edmondson [*Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **96**, 636—641 (1936)] auf Grund seiner eigenen abweichenden Ergebnisse [*Astron. J.* **45**, 1—13 (1935)] erhobenen Einwänden gegen eine frühere Arbeit des Verf. [*Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **96**, 61—67 (1935)] hält Mineur nach einer kritischen Darlegung der verschiedenen Voraussetzungen daran fest, daß aus dem interpolatorischen Ansatz $V = ar + br^2 + crz^2$ für die Geschwindigkeiten der Kugelhauften (r = Achsenabstand, z = Abstand von der galaktischen Ebene) auf eine Rotation des Systems zu schließen sei. *Wempe.*

Atkinson, R. d'E.: On the rotation of the planetary nebulae. *Astrophys. J.* **85**, 1—8 (1937).

The observed angular momenta of some planetary nebulae are by far too great to be reconciled with the assumption of the constancy of the total angular momentum in the course of nebula's expansion. According to the hypothesis made in the paper, the secular increase of the momentum is due to the transverse effect of the radiation pressure. Owing to atomic screening the strip down the centre of the apparent disk of the central star parallel to the axis of its rotation, will appear dark in the light of the resonance frequency. At the same time owing to the Doppler shift the rest of the disk will appear bright. If, in addition, there exists a considerable Einsteinian red shift, then the illumination of the disk will be asymmetrical. This will cause a transverse component in the momentum absorbed with light quanta by the atoms in the envelope of the nebula. It is shown that the order of magnitude of the angular momentum thus acquired by the envelope is sufficient to account for the observed large rotational velocities of the nebulae. *Kyrill Ogrodnikoff (Poulkovo).*

Berglund, Folke: On the masses of the stars. *Lunds Univ. Årsskr.*, N. F. **32**, Nr 6, 1—25 (1936).

The masses of about 2000 binary stars contained in Schlesinger's Catalogue of Stellar Parallaxes are computed according to Seares's method [*Mt. Wilson Contr.* **226** = *Astrophys. J.* **55**, 165 (1922)]. The results are summed up in a table giving the geometrical mean values of the total mass as also the mass ratio and the mass of the primary for different spectral subgroups for giants and dwarfs separately. The range of the latter is from 32 to 0.45 solar masses. *Kyrill Ogrodnikoff (Poulkovo).*

Robb, Richard A.: The correlation between absolute magnitude, linear tangential velocity, distance, apparent magnitude and proper motion. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **97**, 67—75 (1936).

In the paper a survey is made of the relations between various attributes of a star such as the absolute and apparent magnitude, distance and proper motion, using the general formulae of linear regression. These formulae have the advantage to be independent of the frequency function of the attributes. — The regression formulae are then applied to numerical examples whereby it is shown that the results are practically identical with the empirical formulae derived by Seares and others from the same data. *Kyrill Ogrodnikoff (Poulkovo).*

Sevin, Émile: Sur les novae et les naines blanches. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 335—337 (1937).

The author shows how the companion of Sirius can be made to conform to Eddington's mass-luminosity relation by assuming that it is composed of neutrons, giving a mean molecular weight $\mu = 1$. He then suggests that his recent ideas on the principal stellar sequence (this Zbl. 15, 377), may be extended to a similar sequence of white dwarf stars, neutrons now playing the part previously ascribed to electrons. *McCrea*.

Russell, Henry Norris: Polytopic index and photospheric conditions. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 97, 127—132 (1937).

This is a development of the work of E. A. Milne on the same subject (this Zbl. 13, 327). Milne considered the problems: given M_1, r_1, μ_1, T_1, n , to find P_1 ; given $M_1, r_1, \mu_1, T_1, P_1$, to find n . The notation is that of the previous abstracts. The present work gives a more complete solution of the latter problem. The result derived by methods similar to Milne's is, working to an adequate approximation,

$$(n+1) \log(T_1/\bar{T}_1) = \log(p_1/\bar{P}_1) - \log F_2(n) + n \log \beta_1, \quad (1)$$

where $\bar{P}_1 = 3GM_1^2/8\pi r_1^4$, $\bar{T}_1 = \mu_1 GM_1/2Rr_1$, and

$$F_2(n) = 3,2^{-n}(n+1)^n \xi_0^{n+1} (-\theta_0')^{n-1}.$$

Here ξ_0 refers to the boundary of the polytrope, and F_2 can be calculated from tables of the solutions of Emden's equations. The author shows how to solve (1) by successive approximations. In the case of the sun, using Milne's values of the parameters, he finds $n = 3,22$, and further shows that the value is not very sensitive to the assumed value of the photospheric pressure p_1 . He then applies the method to standard stellar types, using his previously adopted data (this Zbl. 9, 134), he finds for giant stars with effective temperatures T_1 ranging from 3150 — 6300° values of n ranging from $2,24$ — $2,49$, and for stars of the main sequence with effective temperatures from 3600 — 16800° , values of n from $2,60$ — $3,80$. The significance of these results is discussed.

W. H. McCrea (Belfast).

Quantentheorie.

Géhéniau, Jules: Les moments d'impulsion dans la théorie du photon de M. L. de Broglie. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 665—668 (1937).

Untersuchung der translatorischen Impulse in der de Broglieschen Theorie des Lichtquants. Es ergibt sich, daß diese nach de Broglie nicht eichinvariant sind.

P. Jordan (Rostock).

Roubaud-Valette, Jean: Relations entre la polarisation d'un photon et les spins des corpuscules constituants. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 483—485 (1937).

Verf. untersucht, an eine ältere Erörterung des Ref. über die Polarisation des Lichtquants anknüpfend, die Beziehung dieser Polarisation zum Neutrinospin, im Sinne der de Broglieschen Auffassung des Lichtquants $h\nu$ als Vereinigung zweier

Neutrinos $\frac{h\nu}{2}$.

P. Jordan (Rostock).

Roubaud-Valette, Jean: Sur les équations du photon. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 747—749 (1937).

Es werde die Verschmelzung (direktes Produkt) von zwei Quaternionensystemen gebildet:

$$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1,$$

I', J', K' ebenso und $\Gamma_1 = iI'$, $\Gamma_2 = iJ'$, $\Gamma = -K'$. Man setze

$$N = \Gamma_1(I\mathfrak{A}_x + J\mathfrak{A}_y + K\mathfrak{A}_z) - \Gamma_2 V$$

und

$$OP = \Gamma_1(IP_1 + JP_2 + KP_3) + \Gamma_2 P_4, \quad P_k = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k};$$

dann können die Maxwell'schen Gleichungen für das Viererpotential \mathfrak{A}, V in der Form $OP(OPN) = 0$ geschrieben werden.

P. Jordan (Rostock).

Thomas, L. H.: Approximation to discrete quantum states by iteration. *Physic. Rev.*, II. s. 51, 202—205 (1937).

Das Eigenwertproblem $N\psi = \lambda D\psi$ soll approximativ gelöst werden (N, D hermitesche Operatoren, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$ Eigenwerte, $\psi_1, \psi_2 \dots$ Eigenfunktionen). Es entsteht aus der Funktion $\varphi_0 = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \dots$ durch wiederholte Anwendung des Operators $N^{-1}D$ der Ausdruck:

$$\varphi_n = (N^{-1}D)^n \varphi_0 = \lambda_1^{-n} c_1 \psi_1 + \lambda_2^{-n} c_2 \psi_2 + \dots$$

Da λ_1 der tiefste Eigenwert ist, bleibt für $n \rightarrow \infty$ nur das erste Glied übrig: $\lambda_1 = \varphi_n / \varphi_{n+1}$. Es werden Fehlerabschätzungen dieser Eigenwertbestimmung angegeben und zwei einfache Beispiele durchgeführt (Schrödingergleichung zu rechteckigem und exponentiellem Potentialtopf).

S. Flügge (Leipzig).

Rose, Morris E.: Relativistic wave functions in the continuous spectrum for the Coulomb field. *Physic. Rev.*, II. s. 51, 484—485 (1937).

For purposes of reference the continuous spectrum solutions of the Dirac wave equation for the Coulomb field are given. The solutions in the form of series and integral representations and the asymptotic behavior at large distances are included among the formulae.

Autoreferat.

● **Weizsäcker, C. F. von:** Die Atomkerne. Grundlagen und Anwendungen ihrer Theorie. (Physik u. Chem. u. ihre Anwendungen in Einzeldarstellungen. Bd. 2.) Leipzig: Akad. Verlagsges. m. b. H. 1937. VIII, 214 S., 40 Fig. u. 1 Taf. RM. 14.40.

Das Buch gibt eine zusammenfassende Darstellung der heutigen Theorie der Atomkerne. Dabei wird mehr Wert auf die Diskussion der Grundlagen der Theorie gelegt als auf die Durchrechnung einzelner Probleme. — Inhalt: I. Grundlagen der Theorie. II. Kernbau; 1. Phänomenologische Theorie; 2. Quantenmechanische Theorie. III. Kernreaktionen; 1. α -Zerfall; 2. Grundlagen der Theorie der erzwungenen Kernreaktionen; 3. Umwandlungen durch materielle Teilchen; 4. Strahlungsvorgänge; 5. Hinweis auf astrophysikalische Anwendungen. IV. Das Problem des β -Zerfalls. *Casimir* (Leiden).

Bechert, Karl: Versuch einer theoretischen Darstellung der Fermischen Konstante. *Naturwiss.* 25, 73 (1937).

Verf. diskutiert, in welcher Weise aus den bekannten Atomgrößen h, e, m, c eine Größe von der Dimension und Größenordnung der in der Fermischen Theorie des β -Zerfalls vorkommenden Konstante g (dies. Zbl. 8, 282) gebildet werden kann.

Casimir (Leiden).

Sextl, Theodor: Methoden zur Bestimmung der Kernstatistik. *Naturwiss.* 25, 153—156 (1937).

Fröhlich, H., und W. Heitler: Über die Einstellzeit von Kernspins im Magnetfeld. *Physik. Z. Sowjetunion* 10, 847—848 (1936).

Niewodniczański, H.: Verbotene Spektrallinien. *Acta Physica Polon.* 5, 111—125 (1936).

Kurzer Bericht über die Deutung verbotener Spektrallinien als elektrische Quadrupol- oder magnetische Dipolübergänge.

R. de L. Kronig (Groningen).

Gombás, Paul: Über einen näherungsweisen Zusammenhang der potentiellen und kinetischen Energieänderung bei der Wechselwirkung atomarer Systeme. *Mat. természett. Értes.* 55, 513—524 (1937).

Schouls, Georgette: Application de l'affinité et de la statistique quantique à la catalyse. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 22, 1064—1071 (1936).

Schouls, Georgette: Déduction et généralisation de la formule d'Arrhénius grâce à l'affinité et à la mécanique quantique. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 22, 1157—1165 (1936).

Neugebauer, Th.: Über die van der Waalschen Kräfte. *Mat. természett. Értes.* 55, 410—428 u. deutsch. Zusammenfassung 429—431 (1937) [Ungarisch].